

TESIS DE MAESTRÍA

**Homeomorfismos en
tres-variedades hiperbólicas
con velocidad de escape
positiva**

Elena Gomes

2024

Orientadores

Santiago Martinchich y Rafael Potrie

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

Resumen

En este trabajo se estudian propiedades dinámicas de homeomorfismos en tres-variedades hiperbólicas observando su interacción con una foliación de codimensión 1.

Una foliación de una tres-variedad M se dice \mathbb{R} -covered cuando su espacio de hojas es homeomorfo a \mathbb{R} , y *uniforme* si todo par de hojas de la foliación levantada al cubrimiento universal están a distancia Hausdorff finita una de otra. Decimos que un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ homotópico a la identidad tiene velocidad de escape positiva con respecto a una foliación \mathbb{R} -covered uniforme si las órbitas en el cubrimiento universal (por un levantado de f a distancia acotada de la identidad) tienden a infinito en el espacio de hojas.

En la tesis se prueba que un homeomorfismo homotópico a la identidad en una tres-variedad hiperbólica con velocidad de escape positiva con respecto a una foliación \mathbb{R} -covered uniforme posee infinitos compactos invariantes disjuntos.

Abstract

In this work we study dynamical properties of homeomorphisms of hyperbolic three-manifolds by observing their interaction with a codimension 1 foliation.

A foliation of a three-manifold M is called \mathbb{R} -covered when its leaf space is homeomorphic to \mathbb{R} , and it is *uniform* if every pair of leaves of the lifted foliation to the universal cover are a finite Hausdorff distance apart. We say that a homeomorphism $f : M \rightarrow M$, which is homotopic to the identity, has positive escape rate *with respect to* an \mathbb{R} -covered uniform foliation if orbits (of a lift of f which is a bounded distance apart from the identity) in the universal cover go to infinity in the leaf space.

We prove that a homeomorphism of a hyperbolic three-manifold which is homotopic to the identity and has positive escape rate with respect to an \mathbb{R} -covered uniform foliation has an infinite number of disjoint, compact, invariant sets.

Agradecimientos

En el camino que me ha traído hasta este punto he tenido la suerte de encontrarme con muchas personas que me ayudaron de una forma u otra, a quienes debo gran parte de lo que soy. A todas ellas les estoy muy agradecida. Quiero aprovechar, sin embargo, para agradecer especialmente al gordo y a Santi, de quienes he aprendido infinitamente a lo largo de este proyecto. Gracias a ambos por darme la oportunidad de trabajar en el mejor equipo que me podría imaginar.

También agradezco a la Universidad de la República por financiar mi maestría a través del programa de becas de la CAP.

Índice general

Agradecimientos	3
Introducción	7
Capítulo 1. Ingredientes del Teorema 1	11
1. Foliaciones	11
1.1. Definiciones	11
1.2. Foliaciones \mathbb{R} -covered y uniformes	12
2. Tres-variedades hiperbólicas	13
2.1. Definición y ejemplos	13
2.2. Topología de tres-variedades hiperbólicas	13
2.3. Homeomorfismos en tres-variedades hiperbólicas	14
2.4. Foliaciones de tres-variedades hiperbólicas	14
3. Homeomorfismos minimales	15
4. Velocidad de escape	16
5. Enunciado del Teorema 1 y consecuencias	19
Capítulo 2. Flujo pseudo-Anosov regulador	21
1. Definición y existencia	21
2. Uniformidad del tiempo de avance	23
3. Contracción y expansión de líneas	24
4. Propiedades de las foliaciones singulares	24
Capítulo 3. Existencia de compactos invariantes	27
1. Conclusión del Teorema 1	27
2. Construcción de buenos entornos	28
3. Invariancia de buenos entornos	30
4. Propiedades de escape	32
5. Construcción de cerrados invariantes	32
6. Conclusión de la prueba	34
7. Prueba de la Proposición 3.2	36
Bibliografía	39

Introducción

La teoría de los sistemas dinámicos busca entender el comportamiento a largo plazo de las órbitas de un sistema que evoluciona en el tiempo. En este sentido, muchas preguntas que surgen naturalmente son acerca de la existencia de órbitas periódicas o conjuntos invariantes. Dado que este trabajo trata sobre dinámica de homeomorfismos en tres-variedades, tiene sentido referir primero a resultados conocidos en dimensiones menores. La teoría de rotación es una herramienta poderosa para predecir propiedades dinámicas de homeomorfismos del círculo y de superficies. El lector es referido a la introducción de [GGL] por un repaso sobre esta teoría. En dimensión 3 se puede definir la *velocidad de escape a infinito* de homeomorfismos homotópicos a la identidad, del mismo modo que se define en dimensión 2, donde se vincula también con la teoría de rotación (ver [GGL] y [Bo]).

En esta tesis estudiaremos homeomorfismos en dimensión 3 con velocidad de escape positiva en un sentido particular. Supondremos que existe una foliación \mathcal{F} de M por superficies, con la propiedad de ser lo que se dice \mathbb{R} -covered y uniforme. Esto significa que el espacio de hojas¹ es homeomorfo a \mathbb{R} , y que los pares de hojas en el cubrimiento universal están a distancia Hausdorff finita. Nos restringiremos además al contexto de tres-variedades *hiperbólicas*, aquellas que son cocientes del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 por un subgrupo discreto de isometrías. En algunos sentidos puede decirse que estas son la mayoría de tres-variedades (ver [T1]), lo que puede ser una motivación en sí misma para su estudio. Además de esto, las restricciones que impone la hiperbolicidad a la topología de la variedad significarán herramientas importantes para nuestro trabajo. En la sección 2 mencionaremos algunas de estas restricciones. Una gran familia de 3-variedades hiperbólicas admite foliaciones \mathbb{R} -covered uniformes, por ejemplo aquellas que admiten *flujos de Anosov \mathbb{R} -covered*, es decir, flujos de Anosov cuyas foliaciones estable e inestable (débiles) son \mathbb{R} -covered (ver, por ejemplo, [F], [FoH], [BI], [B]). Diremos que un homeomorfismo homotópico a la identidad en una tres-variedad hiperbólica tiene velocidad de escape positiva *con respecto a una foliación \mathbb{R} -covered* uniforme, si las órbitas en el cubrimiento universal² tienden a infinito en el espacio de hojas.

El resultado principal de la tesis es el siguiente.

¹Es decir, el espacio cociente del cubrimiento universal \widetilde{M} por la foliación levantada.

²Nos referimos a las órbitas por un levantado al cubrimiento universal que esté a distancia acotada de la identidad.

TEOREMA 1. *Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered y uniforme de una 3-variedad hiperbólica cerrada M . Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo homotópico a la identidad con velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} , entonces existen infinitos compactos no vacíos de M , disjuntos, invariantes por f .*

Veremos que un homeomorfismo con velocidad de escape positiva respecto de una foliación uniforme cumple que los puntos en el cubrimiento universal tienden a infinito con velocidad positiva. De hecho, veremos que tienden a infinito *con velocidad positiva en el espacio de hojas* en un sentido que precisaremos. En particular, el Teorema 1 implica que un tal homeomorfismo no puede ser minimal.

En ese sentido el tema de la tesis se relaciona con el problema general de describir los flujos y homeomorfismos minimales en tres-variedades. Una conjetura actualmente abierta es que no existen flujos minimales en la esfera S^3 ([Go]), aunque sí hay ejemplos de homeomorfismos minimales. Más aún, en [FH] se construyen ejemplos de homeomorfismos minimales en cualquier tres-variedad de Seifert, que son las que admiten foliaciones por círculos. Sin embargo, estas variedades no son hiperbólicas.

En su artículo [G], Goodman da un método para construir flujos de Anosov en una familia de variedades hiperbólicas y, gracias a un teorema de Plante ([P1]), las foliaciones estable e inestable fuerte de estos flujos de Anosov son minimales en el sentido de que sus hojas son densas en la variedad. Esto provee una forma de obtener flujos minimales en algunas tres-variedades hiperbólicas. Como explicamos en la Sección 1.3, el tiempo t de estos flujos es un homeomorfismo minimal, para muchos valores de $t \in \mathbb{R}$. No obstante, veremos en la Sección 1.4 que estos homeomorfismos tienen velocidad cero de escape a infinito.

Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo minimal homotópico a la identidad en una 3-variedad hiperbólica, las órbitas tienden a infinito en el cubrimiento universal (ver Sección 4). En la misma línea, una pregunta que nos podemos hacer es la siguiente. ¿Puede ser que las órbitas escapen a infinito *con velocidad positiva*? Actualmente no se conocen ejemplos de homeomorfismos que cumplan esto, lo cual lleva a pensar que quizás la respuesta sea negativa.

Un caso particular del Teorema 1 interesante por sí mismo es en el que la foliación está dada por una fibración. Si $M = S \times \mathbb{R} / \sim$ es la variedad suspensión de un homeomorfismo de tipo pseudo-Anosov³ en una superficie hiperbólica S , el tiempo $t > 0$ del flujo suspensión en M (Sección 1.2) es un homeomorfismo con velocidad de escape positiva respecto de la foliación \mathcal{F} por fibras de M . Del mismo modo, cualquier homeomorfismo en M que se levante a uno en $S \times \mathbb{R}$ de la forma

$$\widehat{f}(x, t) = (g(x, t), t + h(x, t)),$$

con h acotada inferiormente por una constante positiva, tiene velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} . El Teorema 1 implica que un tal homeomorfismo no puede ser minimal. Ideas con un espíritu similar a las del Teorema

³Es decir, un homeomorfismo cuya acción en $\pi_1(S)$ no tiene elementos periódicos.

1 se manejan en [Fa], y podrían acaso usarse para intentar dar una prueba alternativa en el caso de la suspensión.

La estrategia de la prueba del teorema está fuertemente inspirada en argumentos que Barthelmé, Fenley, Frankel y Potrie dan en [BFFP1].

La herramienta más importante que usaremos es la existencia de un flujo *pseudo-Anosov regulador* para la foliación \mathcal{F} , que cumple el rol del flujo suspensión del ejemplo anterior. Se trata de un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ transverso a la foliación, tal que las órbitas de su levantado $\tilde{\phi}$ al cubrimiento universal intersectan toda hoja de la foliación levantada $\tilde{\mathcal{F}}$, y de modo que, para cualquier par de hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$, el flujo lleva cualquier punto de una a la otra en tiempo finito. Además, ϕ es un flujo pseudo-Anosov, lo que definiremos en la Sección 2.1, pero que intuitivamente significa que ϕ preserva dos foliaciones singulares de M y lejos de finitas órbitas singulares es localmente modelado en un flujo de Anosov topológico (ver [C1]).

Una propiedad relevante de los flujos pseudo-Anosov es que poseen infinitas órbitas periódicas, y que estas son homotópicamente no triviales. En la prueba, el hecho de que el homeomorfismo f sea isotópico a la identidad nos permitirá ver que un buen levantado \tilde{f} al cubrimiento universal está relativamente cerca del flujo $\tilde{\phi}$. De este modo, siendo $\gamma \in \pi_1(M)$ representada por una órbita periódica δ de ϕ , consideraremos $\tilde{\delta}$ la órbita de $\tilde{\phi}$ que es levantada de δ y es fija por γ . Construiremos un cerrado $T_\gamma \subset \tilde{M}$ invariante por \tilde{f} y por γ tomando un entorno tubular suficientemente grande de $\tilde{\delta}$ e intersectándolo con todos sus iterados por \tilde{f} .

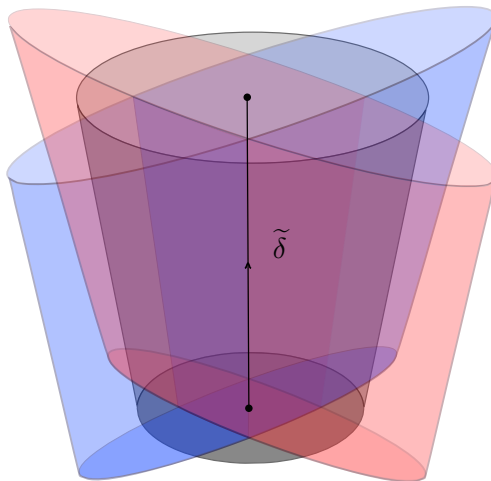


FIGURA 1. Construcción de T_γ .

Finalmente, veremos que si γ y η son representadas por órbitas periódicas distintas, sus cerrados invariantes asociados, T_γ y T_η , se proyectan a compactos invariantes disjuntos en M .

Ingredientes del Teorema 1

1. Foliaciones

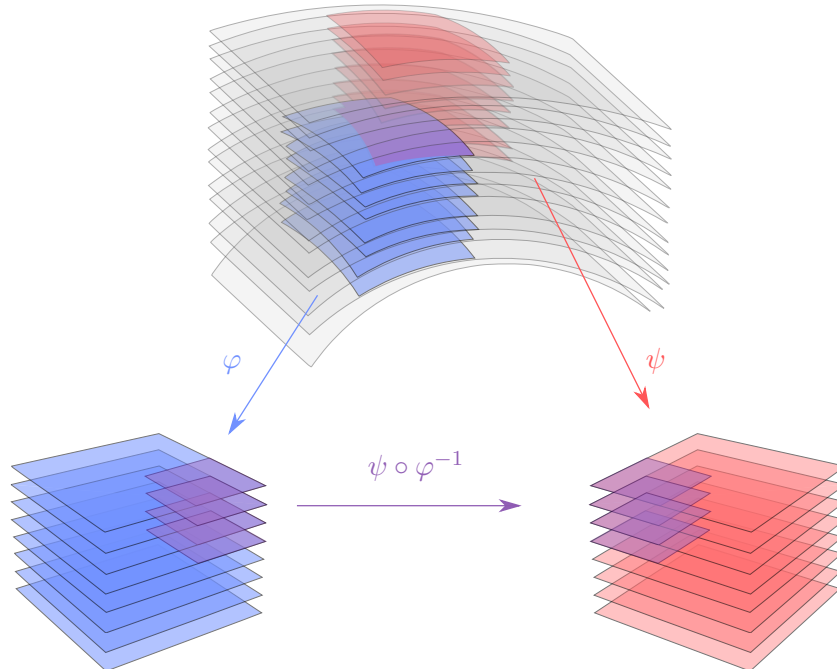
1.1. Definiciones. Intuitivamente, una *foliación* de una variedad es una partición de esta en subvariedades conexas de la misma dimensión, a las que llamamos *hojas*, de forma tal que localmente se ve como la partición $\{\mathbb{R}^n \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}^m}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

DEFINICIÓN 1.1 (Foliación). Sea M una variedad de dimensión m . Una foliación C^r de dimensión n de M es un atlas \mathcal{F} de M que es maximal con las siguientes propiedades.

1. Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, existen discos abiertos U_1, U_2 de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente, tales que $\varphi(U) = U_1 \times U_2$.
2. Los cambios de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ son funciones C^r de la forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

para $(x, y) \in (U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2)$.



Sean \mathcal{F} una foliación C^r de dimensión n de una variedad M de dimensión $m > n$, y $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, con $c \in U_2$, se llaman *placas* de U . Fijado $c \in U_2$, el mapa

$$\varphi|_{U_1 \times \{c\}}^{-1} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$$

es una inmersión C^r , de modo que las placas son subvariedades C^r de M de dimensión n . Además, dos placas de U o bien coinciden o bien son disjuntas.

Un *camino de placas* de \mathcal{F} es una secuencia finita p_1, \dots, p_k de placas de \mathcal{F} tal que $p_i \cap p_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, k-1$. Se define en M la relación de equivalencia \sim de manera que $x \sim y$ si y solo si existe un camino de placas de \mathcal{F} , p_1, \dots, p_k , con $x \in p_1$ e $y \in p_k$. Las clases de equivalencia de esta relación se llaman las *hojas* de \mathcal{F} . Las cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ inducen en las hojas de \mathcal{F} una estructura de variedades C^r ([**CL**, Thm. 1]). Por conveniencia notaremos $L \in \mathcal{F}$ para decir que L es una hoja de \mathcal{F} .

Decimos que una foliación C^0 es *de tipo $C^{0,1}$* si sus hojas son variedades C^1 cuyo espacio tangente varía continuamente. El siguiente resultado es [**C2**, Cll. 3.5].

TEOREMA 1.1 (Calegari). *Sea \mathcal{F} una foliación C^0 de una tres-variedad compacta M . Luego M admite una estructura diferenciable que hace que la foliación \mathcal{F} sea de tipo $C^{0,1}$.*

A partir de ahora supondremos que toda foliación mencionada es de tipo $C^{0,1}$, ya que esto simplificará nuestro trabajo, por ejemplo, a la hora de medir longitudes dentro de las hojas. Gracias al teorema de Calegari, no estaremos perdiendo generalidad con respecto a considerar una foliación C^0 .

1.2. Foliosiones \mathbb{R} -covered y uniformes. De aquí en más trabajaremos en variedades de dimensión 3 y, salvo que se explicita otra cosa, las foliosiones consideradas serán de dimensión 2. La referencia general para esta sección es el libro [**C1**, Caps. 4 y 9].

Sea M una tres-variedad y $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ su cubrimiento universal. Toda foliación \mathcal{F} de M se levanta a una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ de \widetilde{M} . El cociente de \widetilde{M} definido por la partición en hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se llama el *espacio de hojas* de \mathcal{F} , y vamos a notarlo $\widetilde{M}/\mathcal{F}$. Cuando \mathcal{F} no tiene *componentes de Reeb*¹, el espacio de hojas es una variedad de dimensión 1, aunque no es necesariamente Hausdorff (ver [**C1**, C. 4]). Sin embargo, en este trabajo nos interesarán únicamente las foliosiones cuyo espacio de hojas es homeomorfo a \mathbb{R} , llamadas *\mathbb{R} -covered*.

DEFINICIÓN 1.2. Una foliación de dimensión 2 de una tres-variedad se dice *\mathbb{R} -covered* cuando su espacio de hojas es homeomorfo a \mathbb{R} .

Además de esto, consideraremos foliosiones con la propiedad de que cualquier par de hojas en el cubrimiento universal están a *distancia Hausdorff* finita.

¹Ver por ejemplo [**CL**, Cáp. VII, §5]

DEFINICIÓN 1.3. Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered de dimensión 2 de una tres-variedad M . Se dice que \mathcal{F} es *uniforme* si, para todo par de hojas $L, L' \in \mathcal{F}$, existe $C > 0$ tal que L está contenida en el C entorno de L' y viceversa.

Un ejemplo de foliaciones \mathbb{R} -covered uniformes de variedades compactas son los fibrados por superficies sobre el círculo. Más adelante veremos otros ejemplos.

2. Tres-variedades hiperbólicas

2.1. Definición y ejemplos. En lo que sigue notaremos por \mathbb{H}^3 al espacio hiperbólico de dimensión 3.

DEFINICIÓN 1.4. Una tres-variedad M se dice *hiperbólica* cuando existe un subgrupo discreto Γ del grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 , tal que M es homeomorfa al cociente \mathbb{H}^3/Γ .

En esta tesis nos restringimos al estudio de tres-variedades hiperbólicas *compactas*. El ejemplo más representativo de una tres-variedad hiperbólica compacta es el de la suspensión de un homeomorfismo pseudo-Anosov en una superficie hiperbólica. Sean S una superficie hiperbólica compacta y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo. Consideramos el espacio cociente

$$M_f = S \times [0, 1] / \sim$$

donde identificamos los puntos $(x, 1)$ y $(f(x), 0)$, para todo $x \in S$. El espacio M_f es una tres-variedad compacta que llamamos la *suspensión* de f . Thurston probó ([T1]) que el homeomorfismo f es de tipo *pseudo-Anosov*, es decir que actúa en $\pi_1(S)$ sin elementos periódicos, si y solo si M_f es hiperbólica.

El Teorema de Agol ([A]) asegura que este es *virtualmente* el único ejemplo de tres-variedad hiperbólica compacta.

TEOREMA 1.2 (Agol). *Si M es una tres-variedad hiperbólica compacta, existe un cubrimiento finito $p : \hat{M} \rightarrow M$ tal que \hat{M} es una suspensión.*

2.2. Topología de tres-variedades hiperbólicas. Siendo M una 3-variedad hiperbólica, llamaremos $\pi_1(M)$ a su grupo fundamental, que identificaremos con el grupo de transformaciones de cubrimiento de \hat{M} . Una prueba del siguiente teorema se encuentra en [doC, Thm. 12.3.2].

TEOREMA 1.3 (Preissmann). *Si M es una variedad riemanniana compacta de curvatura negativa, todo subgrupo abeliano de $\pi_1(M)$ es cíclico infinito.*

El Teorema de Preissmann implica que el grupo fundamental de una variedad hiperbólica no tiene subgrupos isomorfos a \mathbb{Z}^2 . De hecho, se tiene la siguiente caracterización, conjeturada por Thurston en [T1] y probada en su totalidad por Perelman en [Pe1],[Pe2a] y [Pe2b].

TEOREMA 1.4 (Thurston-Perelman). *Una tres-variedad compacta M es hiperbólica si y solo si su grupo fundamental es infinito, no tiene subgrupos isomorfos a \mathbb{Z}^2 , y $\pi_2(M) = 0$.*

Que $\pi_2(M)$ sea trivial significa que todo mapa de la esfera S^2 en M es homotópico a una constante.

2.3. Homeomorfismos en tres-variedades hiperbólicas. El Teorema 1 trata sobre homeomorfismos homotópicos a la identidad. Resulta que en una tres-variedad hiperbólica esta hipótesis no es demasiado restrictiva, puesto que todo homeomorfismo de una tres-variedad hiperbólica compacta tiene un iterado homotópico a la identidad. Esto es consecuencia de un resultado sorprendente debido a Mostow, del que se puede encontrar una prueba en [M].

TEOREMA 1.5. *Todo homeomorfismo en una tres-variedad hiperbólica compacta es homotópico a una isometría.*

Por otra parte, se sabe que el grupo de isometrías de una tres-variedad hiperbólica compacta es finito. De hecho, vale el siguiente teorema ([K]).

TEOREMA 1.6. *Un grupo es finito si y solo si es el grupo de isometrías de alguna tres-variedad hiperbólica compacta.*

Esto nos da el siguiente corolario.

COROLARIO 1.7. *Todo homeomorfismo en una tres-variedad hiperbólica compacta tiene un iterado homotópico a la identidad.*

Para un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ homotópico a la identidad decimos que un levantado $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es un *buen levantado* cuando \tilde{f} conmuta con la acción de $\pi_1(M)$. Observar que, en ese caso, \tilde{f} está a distancia acotada de la identidad. Se cumple que, si f_t es una homotopía con $f_0 = id$ y $f_1 = f$, entonces \tilde{f}_1 es un buen levantado de f , siendo \tilde{f}_t la homotopía levantada de f_t tal que $\tilde{f}_0 = id$.

2.4. Foliaciones de tres-variedades hiperbólicas. Sea M una tres-variedad hiperbólica. Consideraremos siempre en \tilde{M} la métrica hiperbólica de \mathbb{H}^3 . Dados dos puntos $x, y \in \tilde{M}$ escribiremos $d(x, y)$ para denotar la distancia entre ellos dada por esta métrica. Usualmente escribiremos también $d(A, B)$ para significar el ínfimo de las distancias entre puntos de dos subconjuntos A y B de \tilde{M} .

Supongamos que \mathcal{F} es una foliación de M y sea $\tilde{\mathcal{F}}$ su levantado a \tilde{M} . Recordar que suponemos siempre que \mathcal{F} es de tipo $C^{0,1}$. En particular, esto nos permite medir distancias dentro de las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ a partir de la métrica inducida en ellas por la de \tilde{M} . Si x e y son dos puntos en la misma hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, notaremos por $d_L(x, y)$ a la distancia *dentro de* L entre x e y . También notaremos por $d_L(A, B)$ al ínfimo de las distancias entre puntos de los subconjuntos A y B de L .

Usaremos a menudo la siguiente notación, siendo $\varepsilon > 0$, $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, $X \subset L$ e $Y \subset \tilde{M}$.

$$B(Y, \varepsilon) := \{x \in \tilde{M} : d(x, Y) < \varepsilon\}$$

$$B_L(X, \varepsilon) := \{x \in L : d_L(x, X) < \varepsilon\}.$$

Enunciaremos ahora una propiedad muy útil de las foliaciones de tres-variedades hiperbólicas.

DEFINICIÓN 1.5. Un homeomorfismo $q : X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos es una *quasi-isometría* si existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$C^{-1}d_X(x, x') - C \leq d_Y(q(x), q(x')) \leq Cd_X(x, x') + C,$$

para todos $x, x' \in X$.

En ese caso, la constante C se llama la *constante de quasi-isometría* de q , y también se dice que q es una *C -quasi-isometría* de X en Y .

Una consecuencia del Teorema de Candel ([Ca]) es la siguiente.

TEOREMA 1.8. *Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered de una tres-variedad hiperbólica compacta. Existe una constante $C > 1$ tal que toda hoja de \mathcal{F} es C -quasi-isométrica al plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .*

3. Homeomorfismos minimales

Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ de un espacio métrico X se dice *minimal* cuando el único subconjunto cerrado no vacío de X que es f -invariante es el propio X . Equivalentemente, f es minimal si toda órbita de f es densa en X . Del mismo modo, un flujo $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ es minimal cuando sus órbitas son densas en X . Se dice que el flujo es *transitivo* si tiene alguna órbita densa.

Una manera de obtener ejemplos de flujos y homeomorfismos minimales en 3-variedades es a través de la construcción de *flujos de Anosov*.

DEFINICIÓN 1.6. Un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ en una 3-variedad riemanniana cerrada M se dice *de Anosov* cuando el fibrado tangente admite una descomposición continua $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ invariante por la acción del diferencial $D\phi_t$, de modo que E^c es tangente a las órbitas de ϕ , y $D\phi_t$ contrae E^s y expande E^u con tasa uniforme.

La compacidad de M implica que la cualidad de un flujo en M de ser de Anosov no depende de la métrica riemanniana elegida ni de la parametrización concreta del flujo.

Es consecuencia del Teorema de la variedad estable ([KH, Thm. 17.4.3]) que los fibrados E^u , E^s , $E^c \oplus E^u$ y $E^c \oplus E^s$ de un flujo de Anosov son *únicamente integrables*. Esto significa que existen foliaciones \mathcal{F}^u , \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^{cu} y \mathcal{F}^{cs} tangentes respectivamente a ellos, y estas foliaciones son las únicas con esta propiedad.

Una foliación de M se dice *minimal* cuando todas sus hojas son densas en M . Un flujo de Anosov *transitivo* cumple la siguiente propiedad, debida a Plante ([P1]).

TEOREMA 1.9 (Plante). *Sea $\varphi_t : M \rightarrow M$ un flujo de Anosov en una variedad compacta M . Si φ_t es transitivo, entonces o bien las foliaciones \mathcal{F}^u y \mathcal{F}^s son minimales, o φ_t es la suspensión de un difeomorfismo de Anosov definido en una subvariedad compacta de codimensión 1 de M .*

En el caso en que M es una 3-variedad hiperbólica, sabemos que M no tiene toros incompresibles (es decir, que \mathbb{Z}^2 no se inyecta en $\pi_1(M)$), lo cual implica que todo flujo de Anosov en M es transitivo, gracias a un teorema de Brunella ([Br]). Por otra parte, la única superficie compacta que admite difeomorfismos de Anosov es el toro \mathbb{T}^2 . Como la suspensión de un difeomorfismo en \mathbb{T}^2 no es una variedad hiperbólica (dado que tiene toros incompresibles), tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 1.10. *Si $\varphi_t : M \rightarrow M$ es un flujo de Anosov en una tres-variedad hiperbólica compacta, las foliaciones \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u son minimales.*

Supongamos que $\varphi_t : M \rightarrow M$ es un flujo de Anosov en una tres-variedad hiperbólica compacta M . Si h_t es un flujo definido a partir de cualquier parametrización de \mathcal{F}^u , sus órbitas son densas por el corolario anterior. Esto implica que su tiempo t es un homeomorfismo minimal para un conjunto residual de $t \in \mathbb{R}$. El flujo h_t se llama *flujo horocíclico (inestable)* asociado a φ_t .

En [G], Goodman introdujo una forma de construir flujos de Anosov en una familia de tres-variedades hiperbólicas, lo cual, por la observación anterior, nos da una familia de ejemplos de homeomorfismos minimales en tres-variedades hiperbólicas. Para otros ejemplos, ver también [F2] y [FoH].

4. Velocidad de escape

Sean M una 3 variedad hiperbólica compacta y $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo homotópico a la identidad. Consideramos \tilde{f} un buen levantado de f a \tilde{M} . Diremos que f *escapa a infinito con velocidad positiva* si se cumple

$$\liminf_n \frac{d(\tilde{f}^n(x), x)}{n} > 0$$

para todo $x \in \tilde{M}$.

En realidad, la definición anterior tiene sentido incluso si M no es hiperbólica, siempre que sea compacta y su cubrimiento universal sea homeomorfo a \mathbb{R}^3 . En este sentido, un primer ejemplo de homeomorfismo con velocidad de escape positiva a infinito es el del tiempo 1 de un flujo generado por un campo constante en el toro \mathbb{T}^3 . Más adelante hablaremos de ejemplos en tres-variedades hiperbólicas.

Un ejemplo importante de homeomorfismos con velocidad de escape cero es el de los construidos a partir del flujo horocíclico asociado a un flujo de Anosov, mencionados en la sección anterior. Supongamos que $\phi_t : M \rightarrow M$ es un flujo de Anosov en una tres-variedad compacta M . Si h_t es una parametrización de la foliación inestable fuerte de ϕ , se cumple para todo $s, t > 0$ la relación $\phi_t \circ h_s = h_{set} \circ \phi_t$. Esto implica que en \tilde{M} , la distancia entre un punto x y su imagen $\tilde{h}_s(x)$ por el flujo levantado está acotada por $d(x, \tilde{h}_s(x)) \leq 2t + se^{-t}$ para todo $t > 0$. De modo que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{d(x, \tilde{h}_s(x))}{s} = 0$.

Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo minimal, entonces las órbitas por \tilde{f} tienen que escapar de todo compacto en el cubrimiento universal. Esto es pues,

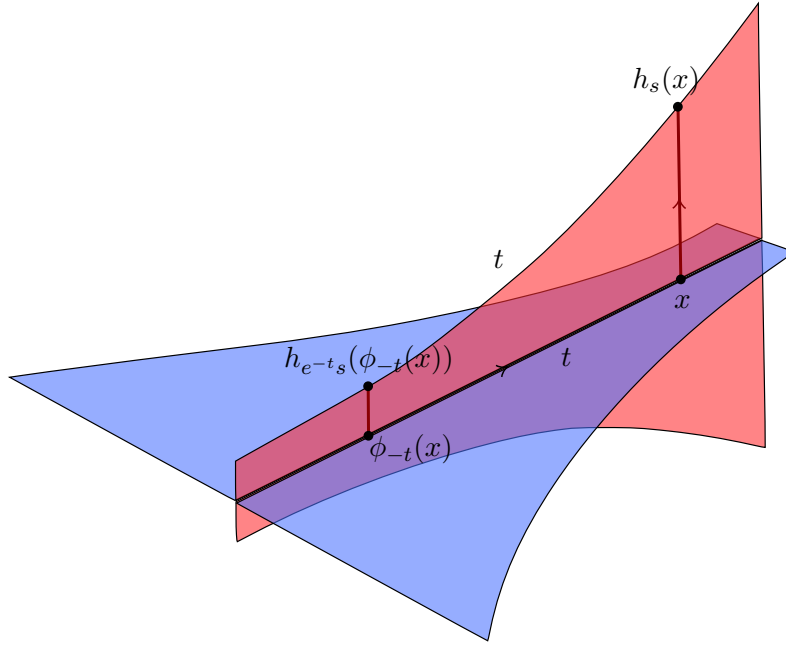


FIGURA 1. El flujo horocíclico tiene velocidad de escape cero.

si la órbita de $x \in \widetilde{M}$ es acotada, su clausura es un compacto \widetilde{f} -invariante C . Su frontera ∂C es un compacto \widetilde{f} -invariante sin interior en \widetilde{M} , de modo que ∂C se proyecta a un compacto f -invariante sin interior en M . Así que f no podría ser minimal.

Dado que los ejemplos conocidos de homeomorfismos minimales en tres-variedades hiperbólicas se reducen al tiempo t de flujos horocíclicos de flujos de Anosov, y estos tienen velocidad de escape cero, tiene sentido hacerse la pregunta sobre si todo homeomorfismo minimal en una tres-variedad hiperbólica tiene velocidad de escape cero.

El Teorema 1, entre otras cosas, responde a un caso particular de esta pregunta: cuando la velocidad de escape es positiva *con respecto a una foliación*, el homeomorfismo no puede ser minimal.

Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covererd en M . Llamamos $\widetilde{\mathcal{F}}$ a su levantado al cubrimiento universal \widetilde{M} . Fijamos una identificación del espacio de hojas con \mathbb{R} , de modo que tiene sentido decir que una hoja L de $\widetilde{\mathcal{F}}$ está *por encima* de otra, L' , lo que notaremos por $L > L'$.

Definamos ahora la velocidad de escape con respecto a una foliación. Supongamos que \mathcal{F} es \mathbb{R} -covered y uniforme, y sea $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo homotópico a la identidad y \widetilde{f} su buen levantado. Para cada $x \in \widetilde{M}$ consideramos la sucesión de hojas $L_n(x)$ donde $L_n(x)$ es la hoja por $\widetilde{f}^n(x)$.

DEFINICIÓN 1.7. Decimos que f tiene *velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F}* si para todo $x \in \widetilde{M}$, se cumple que $\limsup_n L_n(x)$ es infinito en el espacio de hojas.

Veamos algunos ejemplos. Si M es la variedad suspensión de un homeomorfismo pseudo-Anosov en una superficie hiperbólica S , como en el ejemplo de la Sección 2.2, el *flujo suspensión* está dado por la proyección a M del flujo $\hat{\varphi}_t : S \times \mathbb{R} \rightarrow S \times \mathbb{R}$ definido por $\hat{\varphi}_t(x, s) = (x, s + t)$. El tiempo 1 del flujo suspensión tiene velocidad de escape positiva con respecto a la foliación de M por fibras.

Si en el ejemplo del flujo en el toro \mathbb{T}^3 consideramos la foliación \mathcal{F} ortogonal a las órbitas del flujo, el tiempo 1 de este tiene velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} .

En el capítulo siguiente mencionaremos otra forma de construir homeomorfismos con velocidad de escape positiva con respecto a una foliación.

La proposición que sigue se obtiene de [C1, Thm. 9.15 y Lemma 9.10].

PROPOSICIÓN 1.11. *Si \mathcal{F} es \mathbb{R} -covered y uniforme, existe un homeomorfismo $Z : \widetilde{M}/\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{M}/\mathcal{F}$ que conmuta con la acción de $\pi_1(M)$ en $\widetilde{M}/\mathcal{F}$, y una constante $c > 0$ tales que, para toda hoja $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$ se tiene $d(L, Z(L)) > c$.*

Un tal homeomorfismo Z se llama un *mapa de estructura* de \mathcal{F} . Supongamos que $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo homotópico a la identidad y que \tilde{f} es su levantado destacado a \widetilde{M} . Escribiremos $\tilde{f}^k > Z$ para decir que, para toda $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y todo $x \in L$, la hoja por $\tilde{f}^k(x)$ está por encima de $Z(L)$.

LEMA 1.12. *Si $f : M \rightarrow M$ tiene velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} , entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{f}^k > Z$.*

DEMOSTRACIÓN. Veremos primero que alcanza encontrar $K \geq 1$ de modo que para todo $x \in \widetilde{M}$ exista $k_x \in \{1, \dots, K\}$ para el cual $L(\tilde{f}^{k_x}(x)) \geq Z(L(x))$. Supongamos que existe tal K . Dado que \tilde{f} está a distancia acotada de la identidad, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $L(\tilde{f}^k(x)) \geq Z^{-m}(L(x))$ para todo $x \in \widetilde{M}$ y $k \in \{1, \dots, K\}$, puesto que la distancia entre toda hoja y su imagen por Z está uniformemente lejos de cero. Consideremos la función $h : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ dada por $h(x) = \tilde{f}^{k_x}(x)$. Observar que h podría no ser continua. Para cada $x \in \widetilde{M}$ sean

$$n_x = \text{máx}\{n : h^n(x) = \tilde{f}^j(x), \text{ para } j \leq (m+1)K\}$$

y j_x tal que $\tilde{f}^{j_x}(x) = h^{n_x}(x)$.

AFIRMACIÓN 1.13. *Para todo $x \in \widetilde{M}$ es $j_x \geq Km$ y $n_x \geq m+1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y = \tilde{f}^{j_x}(x)$. Luego $h^{n_x+1}(x) = \tilde{f}^{k_y}(y) = \tilde{f}^{j_x+k_y}(x)$, y $k_y \leq K$. Si fuera $j_x \leq Km$, tendríamos $j_x + k_y \leq K(m+1)$, contradiciendo la definición de n_x . Esto significa que $j_x > Km$ y, por lo tanto, también $n_x \geq m+1$. \square

Veremos que $\tilde{f}^{(m+1)K} > Z$. Para todo x , por la afirmación anterior es $(m+1)K - j_x < K$. Por definición de m esto implica que

$$L(\tilde{f}^{(m+1)K}(x)) \geq Z^{-m}(L(\tilde{f}^{j_x}(x))).$$

Por otra parte, es

$$\tilde{f}^{(m+1)K}(x) = \tilde{f}^{(m+1)K-j_x} \tilde{f}^{j_x}(x) = \tilde{f}^{(m+1)K-j_x} h^{n_x}(x).$$

Observar además que $h > Z$ por definición, así que, como $n_x \geq m+1$,

$$L(\tilde{f}^{(m+1)K}(x)) \geq Z^{-m}(L(h^{n_x}(x))) \geq Z^{-m}Z^{m+1}(L(x)) \geq Z(L(x)).$$

Ahora probemos que existe un K como antes. Si no fuera así, habría una sucesión $x_n \in \tilde{M}$ de puntos tales que $L(\tilde{f}^j(x_n)) < Z(L(x_n))$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Por compacidad de M , a menos de tomar una subsucesión, existen elementos $\gamma_n \in \pi_1(M)$ tales que $\gamma_n x_n$ converge a un punto $x \in \tilde{M}$. Gracias a que \tilde{f} y Z conmutan con la acción de $\pi_1(M)$ y que esta preserva la orientación del espacio de hojas, sigue siendo $L(\tilde{f}^j(\gamma_n x_n)) < Z(L(\gamma_n x_n))$ para todo n y $j \in \{1, \dots, n\}$. Por hipótesis sabemos que la órbita de x tiende a infinito en el espacio de hojas, así que existe j tal que $L(\tilde{f}^j(x)) > Z^2(L(x))$. Sea N tal que para todo $n \geq N$ se cumpla $Z(L(\gamma_n x_n)) < Z^2(L)$ (se puede por continuidad de Z) y también $L(\tilde{f}^j(\gamma_n x_n)) > Z^2(L(x))$ (existe por continuidad de \tilde{f}^j). En particular cuando $n \geq j$ tendríamos que $L(\tilde{f}^j(\gamma_n x_n)) \geq Z(L(\gamma_n x_n))$, lo que da una contradicción. \square

En particular, como la distancia entre cualquier hoja $L \in \tilde{F}$ y sus iterados $Z^n(L)$ tiende a infinito con n , resulta que f escapa a infinito con velocidad positiva. Esto justifica el nombre *velocidad* de escape con respecto a \mathcal{F} .

COROLARIO 1.14. *Si $f : M \rightarrow M$ tiene velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} , entonces f escapa a infinito con velocidad positiva.*

5. Enunciado del Teorema 1 y consecuencias

Recordemos el resultado principal de la tesis.

TEOREMA 1. *Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered y uniforme de una 3-variedad hiperbólica compacta M . Si $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo con velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} , entonces existen infinitos compactos no vacíos de M , disjuntos, invariantes por f .*

Diremos que un homeomorfismo en una variedad *preserva* una foliación si manda hojas en hojas. La siguiente dicotomía está probada en [BFFP1, Cllly. 3.10]

TEOREMA 1.15. *Supongamos que \mathcal{F} es una foliación minimal de una 3-variedad compacta M , y $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo homotópico a la identidad que preserva \mathcal{F} . Si \tilde{f} es un buen levantado de f , entonces o bien*

- (1) \tilde{f} fija todas las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$, o bien

(2) \mathcal{F} es \mathbb{R} -covered uniforme y \tilde{f} actúa como traslación en el espacio de hojas.

COROLARIO 1.16. *Supongamos que \mathcal{F} es una foliación minimal de una 3-variedad hiperbólica M y $f : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo que preserva \mathcal{F} . Sea \tilde{f} un buen levantado de f . Si f es minimal, entonces \tilde{f} fija todas las hojas de \mathcal{F} .*

DEMOSTRACIÓN. Si se da caso (2) del Teorema 1.15, entonces f tiene velocidad de escape positiva con respecto a la foliación. Así que se aplica directamente el Teorema 1.

□

Flujo pseudo-Anosov regulador

1. Definición y existencia

En este capítulo se introduce el ingrediente más importante de la prueba del Teorema 1: el *flujo pseudo-Anosov regulador* de una foliación.

DEFINICIÓN 2.1. Un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ es un *flujo pseudo-Anosov topológico* si preserva un par de foliaciones singulares transversas, \mathcal{W}^{ws} y \mathcal{W}^{wu} , tales que

1. Todo par de órbitas en la misma hoja de \mathcal{W}^{ws} son asintóticas a futuro y todo par de órbitas en la misma hoja de \mathcal{W}^{wu} son asintóticas a pasado,
2. Las hojas singulares de \mathcal{W}^{ws} y \mathcal{W}^{wu} son finitas, de tipo *p-prong* a lo largo de una órbita periódica de ϕ (ver Figura 1).

Llamamos *regulares* a las órbitas de ϕ sin prongs. Del mismo modo, llamamos puntos regulares a aquellos cuya órbita es regular.

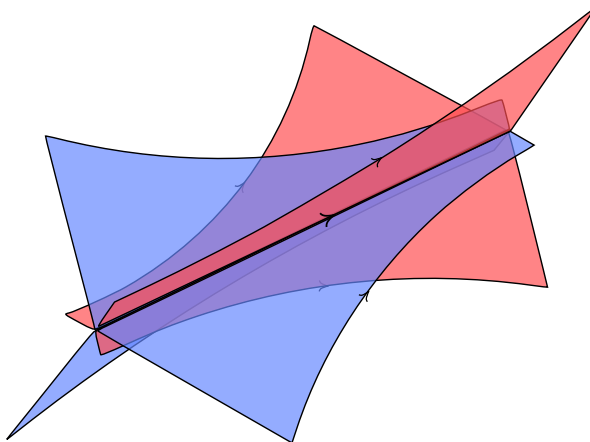


FIGURA 1. Modelo local de una 3-prong.

Una propiedad importante de los flujos pseudo-Anosov es la existencia de órbitas periódicas.

PROPOSICIÓN 2.1 ([Mo]). Si $\phi_t : M \rightarrow M$ es un flujo pseudo-Anosov topológico, entonces ϕ_t tiene infinitas órbitas periódicas.

El siguiente teorema se encuentra en [C1, Thm. 9.31], [F2], basado en [T2].

TEOREMA 2.2. *Si M es una 3-variedad hiperbólica y \mathcal{F} es una foliación \mathbb{R} -covered de M , entonces existe un flujo pseudo-Anosov $\tilde{\phi}_t : M \rightarrow M$ transverso a \mathcal{F} , tal que toda órbita de $\tilde{\phi}$ intersecta toda hoja de \mathcal{F} .*

Si ϕ es un flujo pseudo-Anosov topológico transverso a \mathcal{F} , en cada hoja $L \in \mathcal{F}$ existen \mathcal{G}^s y \mathcal{G}^u foliaciones singulares transversas de dimensión 1, dadas por las intersecciones de \mathcal{W}^{ws} y \mathcal{W}^{wu} con L , que varían continuamente con L .

Llamaremos *línea estable* a un encaje de \mathbb{R} en una hoja de \mathcal{G}^s . Es decir que si $\mathcal{G}^s(x)$ es una hoja de \mathcal{G}^s que no contiene prongs, entonces la única línea contenida en ella es la misma $\mathcal{G}^s(x)$. En cambio, si $\mathcal{G}^s(x)$ contiene una prong, habrá varias líneas contenidas en $\mathcal{G}^s(x)$, correspondientes a tomar cada uno de los “caminos” posibles al llegar a la prong (ver Figura 2).

Del mismo modo, una *línea inestable* será un encaje de \mathbb{R} en una hoja de \mathcal{G}^u .

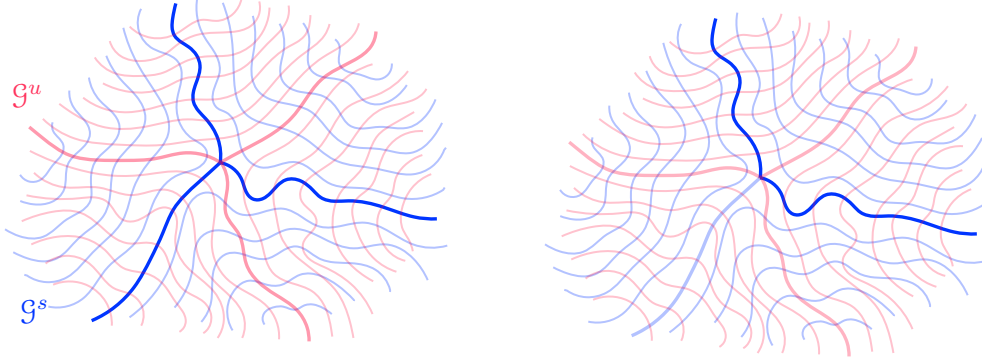


FIGURA 2. Una línea estable por una 3-prong.

Recordar que, como corolario del Teorema de Candel, las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$ con la métrica inducida por la de \mathbb{H}^3 son quasi-isométricas a \mathbb{H}^2 vía una quasi-isometría con constante independiente de la hoja (Teorema 1.8). Diremos que un par de quasigeodésicas de la misma hoja $L \in \mathcal{F}$ se cortan a ángulo θ si las geodésicas de \mathbb{H}^2 que las sombream (módulo la identificación de L con \mathbb{H}^2) se intersectan a ángulo $\theta \in [0, \pi/2]$.

La construcción hecha en [C1, Thm. 9.31] de hecho muestra lo siguiente.

HECHO 2.3. *Sea \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered uniforme de una tres-variedad hiperbólica M . El flujo pseudo Anosov dado por el Teorema 2.2 puede ser considerado con las siguientes propiedades.*

1. **Regularidad y transversalidad.** *Las órbitas del flujo son curvas C^1 , transversas a las hojas de \mathcal{F} . Las foliaciones singulares \mathcal{W}^{ws} y \mathcal{W}^{wu} son $C^{0,1}$.*
2. **Líneas quasi-geodésicas.** *Existe $C \geq 1$ tal que toda parametrización por longitud de arco $\{\ell(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ de una línea estable o inestable en una hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ es un encaje C -quasi-isométrico de \mathbb{R} en L . Es decir, para*

todos $t, s \in \mathbb{R}$ se cumple

$$C^{-1}d_L(\ell(t), \ell(s)) - C \leq |t - s| \leq Cd_L(\ell(t), \ell(s)) + C.$$

3. **Ángulo de intersección acotado.** Existe $\theta_0 \in (0, \pi/2]$ tal que el ángulo de intersección de cualquier par de líneas que se cortan dentro de cualquier hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ es mayor a θ_0 .

Fijada una foliación \mathbb{R} -covered uniforme de una tres-variedad hiperbólica M diremos que un flujo con las propiedades del Hecho 2.3 es un *flujo pseudo-Anosov regulador de \mathcal{F}* . Definimos la distancia $d_{\mathcal{F}^s}$ entre puntos x, y de una misma línea estable en $L \in \mathcal{F}$ como la longitud del segmento de línea entre ellos. Análogamente definimos $d_{\mathcal{F}^u}$.

2. Uniformidad del tiempo de avance

PROPOSICIÓN 2.4. Si \mathcal{F} es una foliación \mathbb{R} -covered uniforme de una tres-variedad hiperbólica M y $\tilde{\phi}_t : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es levantado de un flujo pseudo-Anosov regulador de \mathcal{F} , entonces, para todo par de hojas $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$, existe t_0 tal que para todo $x \in L$ se tiene $\tilde{\phi}_t(x) \in L'$ para algún $|t| \leq t_0$.

La proposición anterior es consecuencia de que la cantidad de tiempo que hay que avanzar en un flujo transversal para ir de una hoja a otra solo depende de la distancia Hausdorff entre ellas. Al considerar un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ transversal a \mathcal{F} con la propiedad de que las órbitas de su levantado al cubrimiento universal intersectan todas las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}$, para cada $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ llamaremos $t_L : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ a la función tal que $\phi_{t_L(x)}(x) \in L$. Observar que t_L es continua para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$.

LEMA 2.5. Sean \mathcal{F} una foliación \mathbb{R} -covered uniforme en una tres-variedad M , y $\tilde{\phi}$ el levantado a \tilde{M} de un flujo transversal, cuyas órbitas intersectan toda hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$. Luego, para todo d existe $t_d > 0$ tal que, para todo par de hojas $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$ a distancia Hausdorff menor a d , se tiene $t_{L'}(x) \leq t_d$ para todo $x \in L$.

DEMOSTRACIÓN. Si el resultado no fuera cierto, existirían una sucesión de puntos $x_n \in \tilde{M}$ y familias de hojas $L_n, L'_n \in \tilde{\mathcal{F}}$ con $x_n \in L_n$ tales que $d_{Haus}(L_n, L'_n) \leq d$, mientras que $t_{L'_n}(x_n) > n$ para todo n . A menos de componer con transformaciones de cubrimiento y tomar una subsucesión, podemos suponer que $x_n \xrightarrow[n]{} x \in \tilde{M}$, ya que las transformaciones de cubrimiento son isometrías y conmutan con $\tilde{\phi}$. Notar que la distancia Hausdorff entre L'_n y la hoja por x está acotada independientemente de n , de modo que existe $H \in \tilde{\mathcal{F}}$ por encima de toda L'_n . Pero esto implicaría que $t_H(x_n) > t_{L'_n}(x_n) > n$ para todo n , con lo cual la órbita de x no podría intersectar nunca H . \square

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 2.4. Como la distancia Hausdorff entre cualquier par de hojas $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$ es finita, el Lema 2.5 implica que la función $t_{L'}$ es acotada en L .

□

3. Contracción y expansión de líneas

Supongamos que $\phi : M \rightarrow M$ es un flujo pseudo-Anosov regulador para una foliación \mathbb{R} -covered uniforme \mathcal{F} y sean $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\mathcal{F}}$ sus levantados a \tilde{M} . Para todo par de hojas $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$ definimos el mapa $\tau_{L,L'} : L \rightarrow L'$ que manda un punto $x \in L$ a la intersección de su órbita por $\tilde{\phi}$ con L' . Lo siguiente sale de [BFFP1, Fact 8.4].

PROPOSICIÓN 2.6. *Existe una constante $\lambda > 1$ tal que para todo $d > 0$ existe un natural k tal que para todo par de hojas $L, L' \in \tilde{\mathcal{F}}$ con $L' > Z^k(L)$, se cumple que, para todo $x \in L$, $y_1 \in \mathcal{G}^u(x)$ e $y_2 \in \mathcal{G}^s(x)$, se tiene*

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{G}^u}(\tau_{L,L'}(x), \tau_{L,L'}(y_1)) &\geq \lambda d, \quad \text{si } d_{\mathcal{G}^u}(x, y_1) \geq d \\ \text{y } d_{\mathcal{G}^s}(\tau_{L,L'}(x), \tau_{L,L'}(y_2)) &\leq \lambda^{-1}d, \quad \text{si } d_{\mathcal{G}^s}(x, y_2) \geq d, \end{aligned}$$

siendo $Z : \tilde{M}/\mathcal{F} \rightarrow \tilde{M}/\mathcal{F}$ un mapa de estructura de \mathcal{F} .

Puesto que a escalas muy pequeñas se debe esperar más tiempo para tener contracción y expansión de tasa λ , por conveniencia fijaremos la constante $d = 1$ y el iterado Z^k correspondiente según la proposición anterior, de modo que se tenga expansión y contracción de tasa λ en toda escala mayor a 1. De aquí en más llamaremos *el* mapa de estructura de una foliación \mathbb{R} -covered uniforme \mathcal{F} al iterado Z^k . Por simplicidad notaremos por Z al mapa de estructura a partir de ahora.

4. Propiedades de las foliaciones singulares

Supongamos en lo que resta de esta sección que \mathcal{F} es una foliación \mathbb{R} -covered uniforme y que $\phi : M \rightarrow M$ es un flujo pseudo-Anosov regulador para \mathcal{F} . Sean $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\phi}$ sus levantados a \tilde{M} .

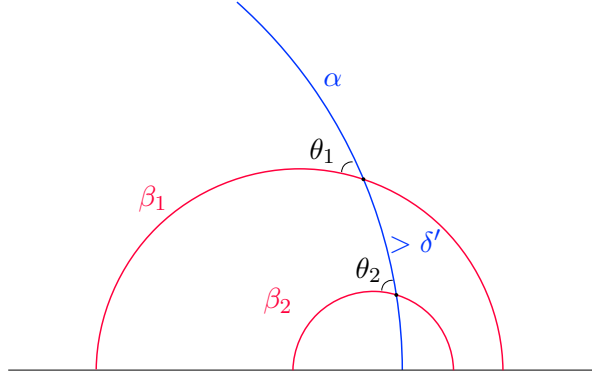
HECHO 2.7. *En toda hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ toda hoja de la foliación singular \mathcal{G}^s de L corta a lo sumo en un único punto a cada hoja de \mathcal{G}^u .*

Es consecuencia de un poco de geometría hiperbólica elemental el siguiente hecho.

HECHO 2.8. *Para todo $\theta \in (0, \pi/2)$ y $d > 0$ existe $d' > 0$ tal que, si α, β_1 y β_2 son geodésicas de \mathbb{H}^2 tales que cada β_i intersecta α en un punto x_i con ángulo $\theta_i \in [\theta, \pi/2]$, y se cumple $d(x_1, x_2) > d'$, entonces $d(\beta_1, \beta_2) > d$.*

Sea $C > 0$ tal que para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ toda línea $\ell \subset L$ estable o inestable está contenida en el C -entorno de una geodésica g_ℓ de L (módulo la identificación de L con \mathbb{H}^2).

LEMA 2.9. *Existe $Q > 0$ tal que en toda hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, para todo $x \in L$, toda línea estable ℓ^s por x y toda línea inestable ℓ^u por x , las geodésicas g_{ℓ^s} y g_{ℓ^u} se intersectan en un punto x' con $d_L(x, x') < Q$.*



DEMOSTRACIÓN. Sea θ_0 del Hecho 2.3.3. Luego existe Q tal que, para cualquier $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ y cualquier par g_1, g_2 de geodésicas de L que se cortan a ángulo $\theta \in [\theta_0, \pi/2]$, la intersección $B_L(g_1, C) \cap B_L(g_2, C)$ de sus C -entornos en L tiene diámetro menor a Q . Ahora dados $x \in L$, ℓ^u y ℓ^s , si $g_{\ell^u} \cap g_{\ell^s} = \{x'\}$, se tiene $x \in B_L(g_{\ell^u}, C) \cap B_L(g_{\ell^s}, C)$. Así que $d_L(x, x') < Q$. \square

LEMA 2.10. Para todo K existe R tal que para toda hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ y todo $x \in L$, si $y \in \mathcal{G}^u(x)$ cumple $d_{\mathcal{G}^u}(x, y) > R$, entonces $d_L(\mathcal{G}^s(x), \mathcal{G}^s(y)) > K$. Del mismo modo, si $y \in \mathcal{G}^s(x)$ cumple $d_{\mathcal{G}^s}(x, y) > R$, entonces $d_L(\mathcal{G}^u(x), \mathcal{G}^u(y)) > K$.

DEMOSTRACIÓN. Fijado K , sea d' dado por el Hecho 2.8 para $d = K + 2C$ y $\theta = \theta_0$ del Hecho 2.3.3. Siendo Q la constante del Lema 2.9, sea $R > 0$ tal que en toda hoja L , si $x, y \in L$ están en la misma línea inestable y $d_{\mathcal{G}^u}(x, y) > R$, entonces $d_L(x, y) > d' + 2Q$ (tal R existe por el Hecho 2.3.2).

En ese caso, se tiene $d_L(\mathcal{G}^u(x), \mathcal{G}^u(y)) > K$. Efectivamente, si ℓ^u es una línea inestable que une a x e y y ℓ_x y ℓ_y son líneas estables por x e y respectivamente, sean $x' = g_{\ell_x} \cap g_{\ell^u}$ e $y' = g_{\ell_y} \cap g_{\ell^u}$. Luego

$$d_L(x', y') \geq d_L(x, y) - 2Q > d',$$

así que

$$d_L(\ell_x, \ell_y) \geq d_L(g_{\ell_x}, g_{\ell_y}) - 2C > K. \quad \square$$

Las órbitas periódicas de ϕ cumplirán un rol importante en lo que sigue, por lo cual es conveniente registrar aquí algunas de sus propiedades. Supongamos que δ es una órbita periódica regular de ϕ y sea $\tilde{\delta} \subset \tilde{M}$ una componente conexa de su preimagen por el mapa de cubrimiento. Observar que $\tilde{\delta}$ es una órbita regular de $\tilde{\phi}$ que, por lo tanto, intersecciona cada hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ en un único punto, que llamamos x_L . Tomando un entorno B de $\tilde{\delta}$ sin puntos singulares se puede definir una parametrización por longitud de arco $\{\alpha_{\ell(y)}(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ de cualquier línea inestable por un punto $y \in B$, de modo que $\alpha_{\ell(y)}(s)$ varíe continuamente

con y dentro de B . Para cada $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ notaremos por α_L a $\alpha_{g^u(x_L)}$. El siguiente hecho se sigue de la continuidad uniforme de $\alpha_L(t)$ en las condiciones iniciales.

HECHO 2.11. *Para todos $T > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe $d > 0$ tal que para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, si $y \in L$ cumple $d_L(x_L, y) < d$, entonces $d_L(\alpha_L(t), \alpha_{\ell(y)}(t)) < \varepsilon$ para todo $|t| \leq T$ y toda $\ell(y)$ línea inestable por y .*

También vale un hecho análogo a 2.11 para líneas estables.

La propiedad siguiente se deduce de [BFM, Prop. 2.24]

PROPOSICIÓN 2.12. *Si $\phi_t : M \rightarrow M$ es un flujo pseudo-Anosov regulador de una foliación \mathbb{R} -covered uniforme de M , entonces ningún par de órbitas periódicas de ϕ_t son homotópicas.*

Para una transformación de cubrimiento $\gamma \in \pi_1(M)$ llamamos g_γ a la geodésica de \mathbb{H}^3 invariante por γ . Consideremos $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ el mapa de cubrimiento. Si α es una curva cerrada en M , existe una transformación de cubrimiento $\gamma \in \pi_1(M)$ que deja invariante una componente conexa de $\pi^{-1}(\alpha)$. Diremos en ese caso que γ es *asociada a la curva α* . Lo que sigue es [GH, Ch. 8, Thm. 30]

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea $\phi_t : M \rightarrow M$ un flujo regulador de una foliación \mathbb{R} -covered uniforme de M . Si $\eta, \gamma \in \pi_1(M)$ son representadas por órbitas periódicas distintas de ϕ , entonces γ y η no comparten ningún punto fijo en el borde de \mathbb{H}^3 .*

Existencia de compactos invariantes

1. Conclusión del Teorema 1

A partir de ahora suponemos que \mathcal{F} es \mathbb{R} -covered y uniforme, y llamamos $\phi_t : M \rightarrow M$ a un flujo pseudo-Anosov regulador para \mathcal{F} (Hecho 2.3). Consideramos también un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ homotópico a la identidad con velocidad positiva con respecto a \mathcal{F} , y \tilde{f} el buen levantado de f a \tilde{M} .

La prueba del Teorema 1 se basará en las dos proposiciones que están a continuación, que probaremos en las próximas subsecciones. Recordar que, para $\gamma \in \pi_1(M)$ llamamos g_γ a la geodésica de \mathbb{H}^3 invariante por γ .

PROPOSICIÓN 3.1. *Para toda $\gamma \in \pi_1(M)$ asociada a una órbita periódica regular de ϕ , existe un cerrado $T_\gamma \subset \tilde{M}$, invariante por γ y por \tilde{f} , que intersecta toda hoja de $\tilde{\mathcal{F}}$ en un compacto no vacío. Además, existe r_0 tal que, para todo $r \geq r_0$, el cerrado maximal invariante dentro del r -entorno de g_γ es T_γ .*

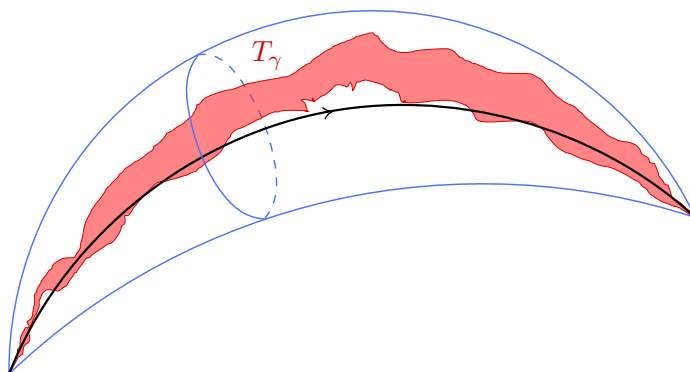


FIGURA 1. Ilustración de la Proposición 3.1.

Un elemento $\alpha \in \pi_1(M)$ se dice *primitivo* cuando la igualdad $\alpha = \beta^j$ para algún $\beta \in \pi_1(M)$ y $j \geq 0$ implica que $j = 1$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Si γ y η son elementos primitivos de $\pi_1(M)$ asociados a órbitas periódicas regulares distintas de ϕ , entonces $\pi(T_\gamma)$ es disjunto de $\pi(T_\eta)$.*

Empecemos viendo que los cerrados invariantes T_γ se proyectan a cerrados en M .

LEMA 3.3. *Para toda $\gamma \in \pi_1(M)$ asociada a una órbita periódica regular de ϕ , la proyección $\pi(T_\gamma)$ es compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Alcanza con ver que $\pi^{-1}(\pi(T_\gamma))$ es cerrado en \widetilde{M} , ya que entonces $\pi(T_\gamma)$ será cerrado en M , que es compacta. Se tiene

$$\pi^{-1}(\pi(T_\gamma)) = \bigcup_{\eta \in \pi_1(M)} \eta T_\gamma.$$

Como los conjuntos ηT_γ son cerrados en \widetilde{M} , basta con probar que todo compacto de \widetilde{M} intersecta solo una cantidad finita de ellos. La Proposición 3.1 garantiza que T_γ está en el r -entorno de la geodésica g_γ para cierto $r > 0$. Dado $K \subset \widetilde{M}$ compacto, sea B una bola de \widetilde{M} que contenga a K , lo suficientemente grande como para que la distancia de K al borde de B sea mayor a r . De este modo, si la geodésica ηg_γ es disjunta de B , el trasladado ηT_γ no intersecta K . Como la acción de $\pi_1(M)$ en \widetilde{M} es discreta y $\pi(g_\gamma)$ es cerrada en M , solo para finitos $\eta \in \pi_1(M)$ el trasladado ηg_γ intersecta B , así que solo finitos trasladados de T_γ intersectan K . □

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 1.

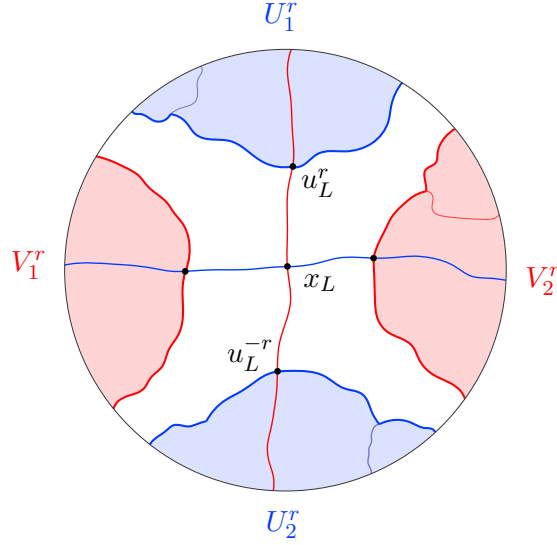
DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Por la Proposición 2.1, existen infinitos elementos en $\pi_1(M)$ asociados a órbitas periódicas regulares distintas de ϕ . Gracias al Lema 3.3 y la Proposición 3.2, siendo γ y η cualquier par de ellos sabemos que $\pi(T_\gamma)$ y $\pi(T_\eta)$ son compactos disjuntos en M . Como T_γ y T_η son no vacíos y \tilde{f} -invariantes, se proyectan en M a compactos no vacíos y f -invariantes. □

2. Construcción de buenos entornos

Fijemos $\gamma \in \pi_1(M)$ asociada a una órbita periódica regular δ de ϕ . Sea $\widetilde{\delta}$ la componente conexa de $\pi^{-1}(\delta)$ invariante por γ . Manteniendo la notación del Capítulo 2, para cada $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$ llamamos x_L al punto de intersección de $\widetilde{\delta}$ con L . Recordar que para cada hoja $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$ y cada punto $x \in L$ llamamos $\mathcal{G}^s(x)$ y $\mathcal{G}^u(x)$ a la intersección de $\mathcal{W}^{ws}(x)$ con L y de $\mathcal{W}^{wu}(x)$ con L respectivamente, y $\alpha_L(s)$ a una parametrización por longitud de arco de $\mathcal{G}^u(x_L)$ que varía continuamente con L .

Para probar la Proposición 3.1 seguiremos una estrategia similar a lo hecho en [BFFP1, §8]. Para todo $r \in \mathbb{R}$ notamos $u_L^r = \alpha_L(r)$. Para $r \neq 0$ sea I_L^r la componente conexa de $L \setminus \mathcal{G}^s(u_L^r)$ que contiene a x_L . Consideramos los conjuntos $U_1^r, U_2^r \subset \widetilde{M}$ dados por $U_1^r = \bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} L \setminus I_L^r$ y $U_2^r = \bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} L \setminus I_L^{-r}$. De manera análoga, si β_L es parametrización por longitud de arco de $\mathcal{G}^s(x_L)$, escribimos $v_L^r = \beta_L(r)$ y definimos J_L^r como la componente de $L \setminus \mathcal{G}^u(v_L^r)$ que contiene a x_L . Luego definimos $V_1^r = \bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} L \setminus J_L^r$ y $V_2^r = \bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} L \setminus J_L^{-r}$.

Notaremos por U^r a la unión $U_1^r \cup U_2^r$ y por V^r a $V_1^r \cup V_2^r$ (ver Figura 2).

FIGURA 2. U^r y V^r vistos en una hoja L .

OBSERVACIÓN 3.4. Para todo $r > 0$ se cumple

1. Si $s > r$, entonces $U_i^s \subset U_i^r$ y $V_i^s \subset V_i^r$
2. $\gamma(V_i^r) = V_i^r$ y $\gamma(U_i^r) = U_i^r$.
3. Existe $K > 0$ tal que $\mathcal{G}^u(x_L) \setminus U^r$ y $\mathcal{G}^s(x_L) \setminus V^r$ están contenidos en $B_L(x_L, K)$, para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$.
4. $\mathcal{W}^{wu}(\tilde{\delta})$ no interseca V^r y $\mathcal{W}^{ws}(\tilde{\delta})$ no interseca U^r .

LEMA 3.5. Para todo $r > 0$, existe $d > 0$ tal que para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ y todo $y \in \mathcal{G}^s(x_L)$ con $d_{\mathcal{G}^s}(x_L, y) < d$, se tiene $\mathcal{G}^u(y) \subset B_L(\mathcal{G}^u(x_L), 1) \cup U^r$.

DEMOSTRACIÓN. Observar que en toda hoja L se tiene $\alpha_L(T) \in U_1^r$ para todo $T > r$. Gracias al Lema 2.10, para T suficientemente grande existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d_L(\alpha_L(T), \mathcal{G}^s(u_L^r))$ para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$. Por el Hecho 2.11, existe d independiente de L tal que para todo $y \in L$ con $d_L(x_L, y) < d$, cualquier línea inestable $\ell(y)$ cumple $\alpha_{\ell(y)}(T) \in U_1^r$. También podemos suponer que $d < r$, y esto implica que $\alpha_{\ell(y)}(t_0) \in \mathcal{G}^s(u_L^r)$ para algún $0 < t_0 < T$. Como $\mathcal{G}^u(y)$ no interseca $\mathcal{G}^s(u_L^r)$ más de una vez (Hecho 2.7), necesariamente $\alpha_{\ell(y)}(t) \in U_1^r$ para todo $t \geq T$.

Por otra parte, también en toda hoja L se tiene $\alpha_L(-T) \in U_2^r$. Si elegimos ε de modo que también cumpla $\varepsilon < d_L(\alpha_L(-T), \mathcal{G}^s(u_L^r))$, entonces $\alpha_{\ell(y)}(-t) \in U_2^r$ para todo $t \geq T$. Esto significa que $\mathcal{G}^u(y) \in B_L(\mathcal{G}^u(x_L), \varepsilon) \cup U^r$. Pidiendo que sea $\varepsilon < 1$, concluimos lo que queríamos. \square

3. Invariancia de buenos entornos

Sea $Z : \widetilde{M}/\mathcal{F} \rightarrow \widetilde{M}/\mathcal{F}$ el mapa de estructura de \mathcal{F} . Recordar que, dado $x \in \widetilde{M}$, llamamos $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$ a la hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}$ por x y escribimos $\widetilde{f}^k > Z$ para denotar que $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))$ está por encima de $Z(\widetilde{\mathcal{F}}(x))$ para todo $x \in \widetilde{M}$.

PROPOSICIÓN 3.6. *Supongamos que k es tal que $\widetilde{f}^k > Z$. Entonces existe $r_k \geq 1$ tal que para $r \geq r_k$ se cumple $\widetilde{f}^k(U_i^r) \subset U_i^{r+1}$ y $\widetilde{f}^{-k}(V_i^r) \subset V_i^{r+1}$.*

Llamamos $\phi_{fk} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ al mapa que manda un punto x a la intersección de la órbita de $\widetilde{\phi}$ por x con la hoja por $\widetilde{f}^k(x)$. Observar que ϕ_{fk} conmuta con toda transformación de cubrimiento.

Como en la Sección 4, llamamos $\lambda > 1$ a una constante tal que, para todo par de hojas $L, L' \in \widetilde{\mathcal{F}}$ con $L' \geq Z(L)$, el mapa $\tau_{L,L'}$ multiplica longitudes (mayores a 1) dentro de \mathcal{G}^u por λ y las longitudes (mayores a 1) dentro de \mathcal{G}^s por λ^{-1} . (Proposición 2.6).

LEMA 3.7. *Supongamos que k cumple $\widetilde{f}^k > Z$. Entonces para $i = 1, 2$ y todo $r \geq 1$ es $\phi_{fk}(U_i^r) \subset U_i^{\lambda r}$ y $\phi_{f^{-k}}(V_i^r) \subset V_i^{\lambda r}$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in U_1^r$, sean L la hoja por x y L' la hoja por $\widetilde{f}^k(x)$. Observar que $\phi_{fk}(x) = \tau_{L,L'}(x)$. De la Proposición 2.6 se sigue que $d_{\mathcal{G}^u}(x_{L'}, \tau_{L,L'}(u_L^r)) > \lambda r$, así que $\tau_{L,L'}(\mathcal{G}^s(u_L^r)) = \mathcal{G}^s(\tau_{L,L'}(u_L^r))$ está contenido en $U_1^{\lambda r}$. Esto quiere decir que $\tau_{L,L'}(U_1^r \cap L)$ está contenido en $U_1^{\lambda r}$. En particular, $\phi_{fk}(x) = \tau_{L,L'}(x) \in U_1^{\lambda r}$.

La prueba para U_2^r y V_i^r es análoga. □

LEMA 3.8. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe K_k tal que*

$$d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))}(\widetilde{f}^k(x), \phi_{fk}(x)) < K_k$$

para todo $x \in \widetilde{M}$.

DEMOSTRACIÓN. La función $x \mapsto d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))}(\widetilde{f}^k(x), \phi_{fk}(x))$ es continua y $\pi_1(M)$ -invariante. Es decir, para todo $x \in \widetilde{M}$, $\gamma \in \pi_1(M)$, se tiene

$$\begin{aligned} & d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(\gamma x))}(\widetilde{f}^k(\gamma x), \phi_{fk}(\gamma x)) \\ &= d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\gamma \widetilde{f}^k(x))}(\gamma \widetilde{f}^k(x), \gamma \phi_{fk}(x)) \\ &= d_{\gamma \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))}(\gamma \widetilde{f}^k(x), \gamma \phi_{fk}(x)) \\ &= d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))}(\widetilde{f}^k(x), \phi_{fk}(x)), \end{aligned}$$

dado que \widetilde{f} y $\widetilde{\phi}$ conmutan con γ y que γ es una isometría entre L y γL para toda $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Como M es compacta, esto implica que $d_{\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{f}^k(x))}(\widetilde{f}^k(x), \phi_{fk}(x))$ es acotada en \widetilde{M} . □

Vale la pena mencionar que el lema anterior no depende de que f tenga velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} . De hecho, tampoco depende de que el flujo sea regulador de la foliación. Cualquier par de mapas $h_1, h_2 : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ a distancia acotada de la identidad, que sean levantados de mapas en M , y que cumplan que $h_1(x)$ está en la misma hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}$ que $h_2(x)$ para todo $x \in \widetilde{M}$, estarán a distancia uniformemente acotada en las hojas.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.6. Estamos suponiendo que k cumple $\widetilde{f}^k > Z$, así que $\phi_{f^k}(U_1^r) \subset U_1^{\lambda r}$ para todo $r \geq 1$ (Proposición 2.6).

Sean K_k dado por el Lema 3.8 y $R \geq 1$ tal que, para todos $x, y \in \widetilde{M}$ con $y \in \mathcal{G}^u(x)$ y $d_{\mathcal{G}^u}(x, y) > R$, sea $d(\mathcal{G}^s(x), \mathcal{G}^s(y)) > K_k$ (tal R existe por el Lema 2.10).

Sea $r_k \geq 1$ tal que $\lambda r_k - (r_k + 1) > R$. Luego, para todo $r \geq r_k$ y toda $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$, se tiene

$$d_{\mathcal{G}^u}(u_L^{\lambda r}, u_L^{r+1}) = \lambda r - (r + 1) > R,$$

así que $d_L(L \cap U_1^{\lambda r}, L \setminus U_1^{r+1}) > K_k$ para toda $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Supongamos que $\widetilde{f}^k(U_1^r)$ no estuviese contenido en U_1^{r+1} . Entonces existiría $x \in U_1^r$ para el cual, si L' es la hoja por $\widetilde{f}^k(x)$, tendríamos

$$d_{L'}(\widetilde{f}^k(x), \phi_{f^k}(x)) \geq d_{L'}(\widetilde{f}^k(x), U_1^{\lambda r} \cap L') > K_k,$$

contradiciendo el Lema 3.8. Concluimos entonces que $\widetilde{f}^k(U_1^r) \subset U_1^{r+1}$ (ver Figura 3).

Razonando de modo análogo se prueba que $\widetilde{f}^k(U_2^r) \subset U_2^{r+1}$ y $\widetilde{f}^{-k_0}(V_i^r) \subset V_i^{r+1}$ para todo $r \geq r_k$. □

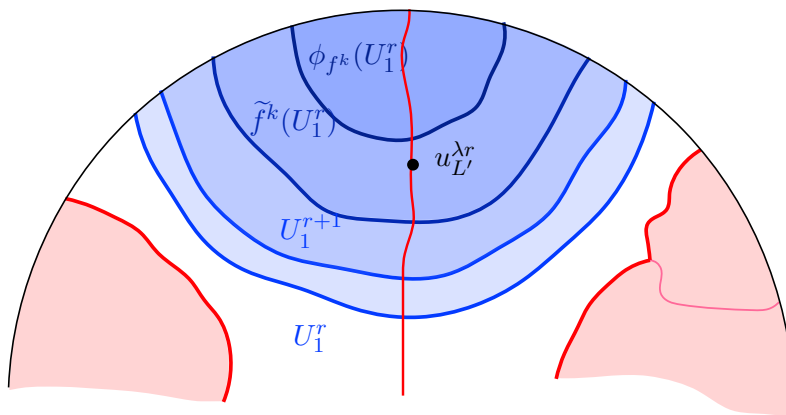


FIGURA 3.

4. Propiedades de escape

Recordar que llamamos γ a una transformación de cubrimiento asociada a una órbita periódica regular δ del flujo pseudo-Anosov regulador ϕ , y $\tilde{\delta}$ a la componente conexa de $\pi^{-1}(\delta)$ que es invariante por γ .

PROPOSICIÓN 3.9. *Si k es tal que $\tilde{f}^k \geq Z$ y r_k es dado por la Proposición 3.6, entonces, para todo $x \in U_i^{r_k}$, $y \in V_i^{r_k}$ se cumple $d(\tilde{f}^{nk}(x), \tilde{\delta}) \xrightarrow[n]{n} +\infty$ y $d(\tilde{f}^{-nk}(y), \tilde{\delta}) \xrightarrow[n]{n} +\infty$.*

La proposición anterior se sigue de las siguientes dos propiedades.

LEMA 3.10. *Si k es tal que $\tilde{f}^k \geq Z$ y r_k es dado por la Proposición 3.6, entonces para todo $x \in U^{r_k}$, si L_n es la hoja por $\tilde{f}^{nk}(x)$, se cumple $d_{L_n}(x_{L_n}, \tilde{f}^{nk}(x)) \xrightarrow[n]{n} +\infty$.*

Análogamente, para todo $y \in V^{r_k}$, si L_n es la hoja por $\tilde{f}^{-nk}(y)$, se tiene $d_{L_n}(x_{L_n}, \tilde{f}^{-nk}(y)) \xrightarrow[n]{n} +\infty$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x \in U_1^{r_k}$. El Lema 2.10 garantiza que $d_{L_n}(x_{L_n}, U_1^{r_k+n} \cap L_n) \xrightarrow[n]{n} +\infty$, puesto que $d_{\mathcal{G}^u}(x_{L_n}, u_{L_n}^{r_k+n}) = r_k + n \xrightarrow[n]{n} +\infty$.

Por su parte, la Proposición 3.6 nos da que $\tilde{f}^{nk}(x) \in U_1^{r_k+n}$, con lo cual $d_{L_n}(x_{L_n}, \tilde{f}^{nk}(x)) \xrightarrow[n]{n} +\infty$.

Las pruebas si $x \in U_2^{r_k}$ ó $x \in V_i^{r_k}$ son análogas. □

LEMA 3.11. *Para todo $K > 0$ existe $K' > 0$ tal que $B(\tilde{\delta}, K)$ está contenida en la unión $\bigcup_{L \in \tilde{\mathcal{F}}} B_L(x_L, K')$.*

DEMOSTRACIÓN. Como γ es una isometría en \tilde{M} y $\tilde{\delta}$ es γ -invariante, fijado $K > 0$, el entorno $B(\tilde{\delta}, K)$ es γ -invariante. Además el cociente de $B(\tilde{\delta}, K)$ por la acción del subgrupo de $\pi_1(M)$ generado por γ es compacto (es homeomorfo a un toro sólido). Sea $h : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a un punto y en una hoja L la distancia $d_L(x_L, y)$. Como h es una función continua y γ -invariante, se sigue que h está acotada en $B(\tilde{\delta}, K)$, lo cual prueba lo que queríamos. □

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.9. Sale directamente de los Lemmas 3.10 y 3.11. □

5. Construcción de cerrados invariantes

El objetivo de esta parte es probar la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.12. *A menos de remplazar \tilde{f} por una potencia, existe r_0 tal que, si $U_i = U_i^{r_0}$ y $V_i = V_i^{r_0}$, se tiene*

1. $\tilde{f}(\bar{U}_i) \subset U_i$ y $\tilde{f}^{-1}(\bar{V}_i) \subset V_i$,
2. existe $K > 0$ tal que, para toda $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, los conjuntos $L \setminus (U \cup \tilde{f}(V))$ y $L \setminus (V \cup \tilde{f}^{-1}(U))$ están contenidos en $B_L(x_L, K)$, y
3. para todo $x \in U_i$, $y \in V_i$ es $d(\tilde{f}^n(x), \tilde{\delta}) \xrightarrow{n} +\infty$ y $d(\tilde{f}^{-n}(y), \tilde{\delta}) \xrightarrow{n} +\infty$.

Para eso primero veremos que tenemos propiedades similares para el flujo regulador.

LEMA 3.13. Si k cumple $\tilde{f}^k > Z$ y r_k es dado por la Proposición 3.6, sean $U = U_1^{r_k} \cup U_2^{r_k}$ y $V = V_1^{r_k} \cup V_2^{r_k}$. Entonces existen $N > 0$ y $j \geq 1$ tales que tanto $\tilde{M} \setminus (U \cup \phi_{f^{jk}}(V))$ como $\tilde{M} \setminus (V \cup \phi_{f^{-jk}}(U))$ están contenidos en $\bigcup_{L \in \tilde{\mathcal{F}}} B_L(x_L, N)$.

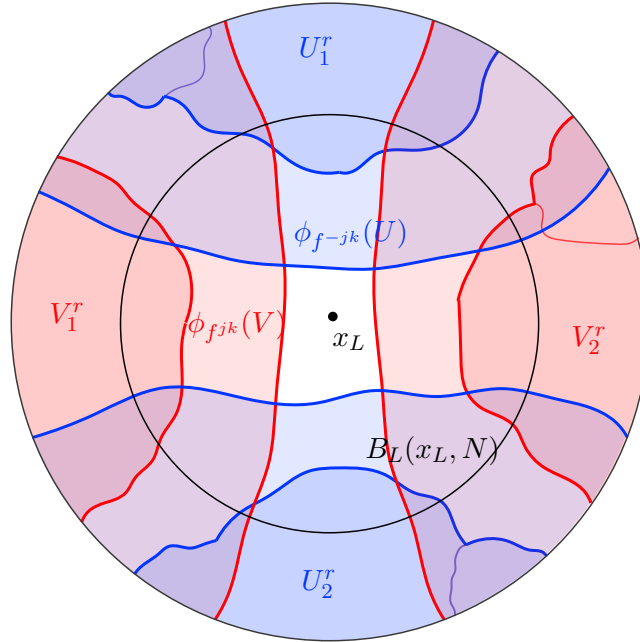


FIGURA 4. Ilustración del Lema 3.13.

DEMOSTRACIÓN. Sea $d > 0$ dado por Lema 3.5 para $r = r_k$. Sea $k' > 0$ dado por Prop 2.6 aplicada a d . Sea $j' \geq 1$ tal que $\lambda^{j'} d > r_k$. Se sigue que, para toda hoja L , si $L' \geq Z^{k'j'}(L)$, el mapa $\tau_{L,L'}$ lleva segmentos de $\mathcal{G}^s(x_L)$ de longitud r_k en segmentos de $\mathcal{G}^s(x_{L'})$ de longitud menor a d . Sea $j = k'j'$.

Sea $x \in \tilde{M} \setminus V$ y sean L la hoja por x y L' la hoja por $\tilde{f}^{jk}(x)$. Veremos que $\phi_{f^{jk}}(x) \in U \cup B_{L'}(\mathcal{G}^u(x_{L'}), 1)$ (Ver figura 4). Observar que $\phi_{f^{jk}}(x) = \tau_{L,L'}(x)$. Como $\tilde{f}^k > Z$, es $L' > Z^j(L)$. Luego $d_{\mathcal{G}^s}(\tau_{L,L'}(v_L^{r_k}), x_{L'}) < d$, así que, por el Lema 3.5

$$\tau_{L,L'}(\mathcal{G}^u(v_L^{r_k})) = \mathcal{G}^u(\tau_{L,L'}(v_L^{r_k})) \subset B_{L'}(\mathcal{G}^u(x_{L'}), 1) \cup U.$$

Entonces $\tau_{L,L'}(L \setminus V)$ está contenido en $B_{L'}(\mathcal{G}^u(x_{L'}), 1) \cup U$ y, por lo tanto, $\phi_{f^{jk}}(x) \in B_{L'}(\mathcal{G}^u(x_{L'}), 1) \cup U$. Siendo $N = r_k + 1$, tenemos que $\widetilde{M} \setminus (\phi_{f^{jk}}(V) \cup U)$ está contenido en $\bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} B_L(x_L, N)$. Como esto se sigue cumpliendo para cualquier $N' > N$ y $m \geq j$, por un razonamiento similar podemos suponer que también se cumple $\widetilde{M} \setminus (\phi_{f^{-jk}}(U) \cup V) \subset B_L(x_L, N)$. \square

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.12. Sean k tal que $\widetilde{f}^k > Z$ (Lema 1.12) y $r_0 := r_k$ dado por la Proposición 3.6. Tomando $d > 0$ y $j \geq 1$ del Lema 3.13 y K_{jk} del Lema 3.8, remplacemos \widetilde{f} por su iterado \widetilde{f}^{jk} . Si definimos $K = d + K_{jk}$, tenemos que $L \setminus (U^{r_0} \cup \widetilde{f}(V^{r_0}))$ y $L \setminus (V^{r_0} \cup \widetilde{f}^{-1}(U^{r_0}))$ están contenidos en $B_L(x_L, K)$ para toda $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Además, la Proposición 3.6 garantiza que $\widetilde{f}(U_i^{r_0}) \subset U_i^{r_0+1}$ y $\widetilde{f}^{-1}(V_i^{r_0}) \subset V_i^{r_0+1}$, de modo que $\widetilde{f}(\overline{U_i^{r_0}}) \subset U_i^{r_0}$ y $\widetilde{f}^{-1}(\overline{V_i^{r_0}}) \subset V_i^{r_0}$. El punto 3 se cumple por la Proposición 3.9. \square

6. Conclusión de la prueba

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.1. En primer lugar, observemos que alcanza probar el resultado para algún iterado de \widetilde{f} . Esto es pues, si $T'_\gamma \subset \widetilde{M}$ es cerrado invariante por \widetilde{f}^k y por γ , y es el maximal invariante en el r -entorno de g_γ para todo $r \geq r'_0$, definimos $T_\gamma = \bigcup_{j=-k}^k \widetilde{f}^j(T'_\gamma)$. Luego T_γ es cerrado γ -invariante, y es $f(T_\gamma) = T_\gamma$. Definiendo $r_0 = r'_0 + 2kd$, en particular T_γ es \widetilde{f}^k -invariante contenido en el r_0 -entorno de g_γ , de modo que $T_\gamma = T'_\gamma$, así que T'_γ es \widetilde{f} -invariante.

Remplazamos entonces \widetilde{f} por un iterado para el cual exista r_0 de modo que se cumplan los puntos 1, 2 y 3 de la Proposición 3.12. Sea $K > 0$ tal que en toda hoja $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$ tanto $L \setminus (\widetilde{f}(V) \cap U)$ como $L \setminus (\widetilde{f}^{-1}(U) \cap V)$ estén contenidos en la bola $B_L(x_L, K)$ y que $\mathcal{G}^u(x_L) \subset B_L(x_L, K) \cup U$ y $\mathcal{G}^s(x_L) \subset B_L(x_L, K) \cup V$ (para tener esto último alcanza con que sea $K > r_0$).

Para toda hoja $L \in \widetilde{\mathcal{F}}$, por brevedad notaremos $U_i^L = U_i \cap L$, $V_i^L = V_i \cap L$, $U^L = U \cap L$ y $V^L = V \cap L$.

Consideramos

$$D = \bigcup_{L \in \widetilde{\mathcal{F}}} \overline{B_L(x_L, K)}.$$

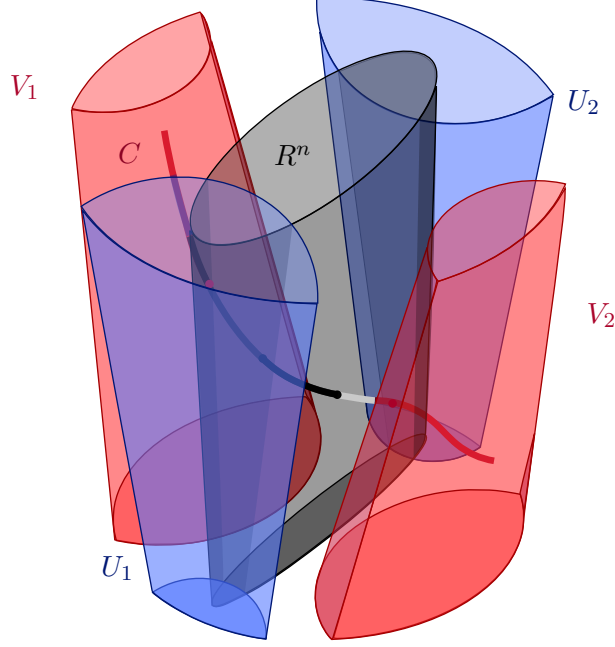
y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$R^n = \bigcap_{k=0}^n \widetilde{f}^k(D) \quad \text{y} \quad Q^n = \bigcap_{k=0}^n \widetilde{f}^{-k}(D).$$

Observar que D es cerrado y, por lo tanto, R^n y Q^n también lo son.

AFIRMACIÓN 3.14. Si $C \subset \widetilde{M}$ es un conexo que intersecta V_1 y V_2 pero no intersecta U , entonces C intersecta $R^n \setminus V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, si C intersecta U_1 y U_2 pero no V , entonces C intersecta $Q^n \setminus U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.



DEMOSTRACIÓN. Haremos la prueba por inducción en n , únicamente para R^n ya que la prueba para Q^n es análoga. Sea $C \subset \tilde{M}$ un conexo que intersecta V_1 y V_2 pero no intersecta U .

Observar que $R^0 = D$. Recordar que $\mathcal{W}^{wu}(\tilde{\delta})$ no intersecta V y está contenida en $D \cup U$. Como $\mathcal{W}^{wu}(\tilde{\delta})$ separa¹ \tilde{M} en dos componentes, una de las cuales contiene a V_1 , y la otra a V_2 , tenemos que C tiene que intersectar \mathcal{W}^{cu} . Así que C intersecta $D \setminus U$.

Ahora supongamos que todo conexo C' que intersecta V_1 y V_2 pero no U tiene que intersectar $R^{n-1} \setminus V$ y sea C un tal conexo. Como $\tilde{f}^{-1}(V_i) \subset V_i$, resulta que $\tilde{f}^{-1}(C)$ es un conexo que intersecta V_1 y V_2 . También, el ser $U \subset \tilde{f}^{-1}(U)$, tenemos que $\tilde{f}^{-1}(C)$ no toca U . Luego, $\tilde{f}^{-1}(C)$ tiene que intersectar $R^{n-1} \setminus V$, así que C intersecta $\tilde{f}(R^{n-1}) \setminus \tilde{f}(V)$. De nuestra elección de K se sigue que el complemento de $\tilde{f}(V) \cup U$ está contenido en D , así que, como C no toca U , concluimos que la intersección $C \cap \tilde{f}(R^{n-1}) \setminus \tilde{f}(V)$ está contenida en $C \cap \tilde{f}(R^{n-1}) \cap D$. Además, esta intersección no toca V , ya que V está contenido en $\tilde{f}(V)$. Como es $R^n = \tilde{f}(R^{n-1}) \cap D$, obtenemos que C intersecta $R^n \setminus V$ como queríamos. □

¹Ver [Mo].

Ahora, fijados $n \in \mathbb{N}$ y $L \in \tilde{\mathcal{F}}$, notaremos $R_L^n = R^n \cap L$ y $Q_L^n = Q^n \cap L$. Por la afirmación 3.14 sabemos que $R_L^n \cup U^L \setminus V$ separa V_1^L de V_2^L , mientras que $R^n \setminus V$ no los separa. Por lo tanto, existe una componente conexa C de $R_L^n \setminus V$ que interseca U_1 y U_2 . Luego, otra vez por la afirmación 3.14, tenemos que C interseca Q_L^n . En particular concluimos que R_L^n interseca Q_L^n .

Finalmente, definimos

$$T_\gamma = \bigcap_{n \geq 0} R^n \cap Q^n.$$

Luego T_γ es f -invariante por construcción, y es γ -invariante dado que D lo es y que \tilde{f} conmuta con γ . Además, la intersección de T_γ con toda hoja $L \in \tilde{\mathcal{F}}$ es el compacto no vacío $\bigcap_{n \geq 0} R_L^n \cap Q_L^n$.

Por otra parte, observemos que existe r_0 tal que T_γ está contenido en el r_0 -entorno de g_γ , ya que δ es homotópica a la proyección de g_γ . Veremos que T_γ es el maximal invariante en todo r -entorno de g_γ con $r \geq r_0$.

Del punto 2 de la Proposición 3.12 se sigue que $\tilde{M} \setminus D$ está contenido en $U \cup \tilde{f}(V)$. De modo que el punto 3 de 3.12 implica que todo punto x fuera de D cumple $d(\tilde{f}^n(x), g_\gamma) \xrightarrow{n} +\infty$ o bien $d(\tilde{f}^{-n}(x), g_\gamma) \xrightarrow{n} +\infty$.

Supongamos ahora que $S \subset \tilde{M}$ es \tilde{f} -invariante contenido en el r -entorno de g_γ para cierto $r \geq r_0$. Por la observación anterior, necesariamente S está contenido en D , así que $S = \tilde{f}^n(S)$ está contenido en $\tilde{f}^n(D)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$S \subset \bigcap_{n \geq 0} \tilde{f}^n(D) \cap \tilde{f}^{-n}(D) = T_\gamma.$$

Esto termina la demostración de la Proposición 3.1. □

7. Prueba de la Proposición 3.2

La Proposición 3.2 sale de los siguientes dos lemas.

LEMA 3.15. *Sean $\gamma, \eta \in \pi_1(M)$ asociadas a órbitas periódicas regulares de ϕ , tales que $\langle \eta \rangle \cap \langle \gamma \rangle = \{1\}$. Entonces T_γ y T_η son disjuntos.*

Observar que, si $\gamma \in \pi_1 M$ está asociada a una órbita periódica de ϕ , entonces para toda $\eta \in \pi_1(M)$ el elemento $\eta\gamma\eta^{-1}$ está asociado a la misma órbita periódica de ϕ . De modo que, por la Proposición 3.1, tiene sentido hablar de $T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$.

LEMA 3.16. *Si $\gamma \in \pi_1(M)$ es asociada a una órbita periódica regular de ϕ , entonces para toda $\eta \in \pi_1(M)$ es $\eta T_\gamma = T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$.*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.2. Sean γ, η asociadas a órbitas periódicas regulares o_γ y o_η respectivamente.

Se tiene

$$\pi^{-1}(\pi(T_\gamma)) = \bigcup_{\alpha \in \pi_1(M)} \alpha T_\gamma \quad \text{y} \quad \pi^{-1}(\pi(T_\eta)) = \bigcup_{\alpha \in \pi_1(M)} \alpha T_\eta$$

Si $\pi(T_\gamma) \cap \pi(T_\eta) \neq \emptyset$, entonces existe $\alpha \in \pi_1(M)$ tal que αT_γ intersecciona T_η . Por el Lema 3.16 esto significa que $T_{\alpha\gamma\alpha^{-1}}$ intersecciona T_η . Del Lema 3.15 obtenemos que $\langle \alpha\gamma\alpha^{-1} \rangle \cap \langle \eta \rangle \neq \{1\}$. Como η y γ son primitivas, resulta que η tiene que ser conjugada a γ o a su inversa. Se deduce que o_γ es homotópica a o_η o su inversa, lo cual, gracias a la Proposición 2.12, implica que $o_\gamma = o_\eta$. \square

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.15. Si $\langle \gamma \rangle \cap \langle \eta \rangle = \{1\}$, según la Proposición 2.13, las geodésicas g_γ y g_η no comparten ningún punto límite en el borde de \mathbb{H}^3 . Por otra parte, existe r tal que T_γ está contenido en el r -entorno de g_γ y T_η en el de g_η , como garantiza la Proposición 3.1. Supongamos por absurdo que existiera $x \in T_\gamma \cap T_\eta$. Dado que f tiene velocidad de escape positiva con respecto a \mathcal{F} , la órbita de x por \tilde{f} escapa de todo compacto en \tilde{M} (Corolario 1.14). Como los puntos borde de g_γ y g_η son distintos, la intersección de sus r -entornos es acotada, pero $T_\gamma \cap T_\eta$, que está contenido en la intersección de estos entornos, también es \tilde{f} -invariante, lo cual da una contradicción. \square

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.16. Para ver que $\eta T_\gamma = T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$ alcanza con probar que ηT_γ está contenido en $T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$ para toda $\eta \in \pi_1(M)$ y $\gamma \in \pi_1(M)$ asociada a una órbita periódica de ϕ . En efecto, en ese caso tenemos que $\eta^{-1}T_{\eta\gamma\eta^{-1}} \subset T_\gamma$, y entonces $T_{\eta\gamma\eta^{-1}} \subset \eta T_\gamma$.

En primer lugar, se cumple que ηT_γ es invariante por $\eta\gamma\eta^{-1}$, pues

$$(\eta\gamma\eta^{-1})\eta T_\gamma = \eta\gamma T_\gamma = \eta T_\gamma,$$

ya que T_γ es γ -invariante. Como T_γ es \tilde{f} -invariante y \tilde{f} es un buen levantado, también se cumple

$$\tilde{f}\eta T_\gamma = \eta\tilde{f}T_\gamma = \eta T_\gamma,$$

así que ηT_γ es \tilde{f} -invariante.

Para probar que $\eta T_\gamma \subset T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$ es suficiente ver que existe R_0 tal que, para todo $r > R_0$, el cerrado maximal invariante por $\eta\gamma\eta^{-1}$ y por \tilde{f} en el r -entorno de $g_{\eta\gamma\eta^{-1}}$ es ηT_γ . Por un lado, existe R_0 tal que, para todo $r > R_0$, el cerrado maximal invariante por η y por \tilde{f} dentro del r -entorno de g_γ es T_γ . Notar que $g_{\eta\gamma\eta^{-1}} = \eta g_\gamma$, por lo tanto, para $r > R_0$ sabemos que ηT_γ es un cerrado invariante en el r -entorno de $g_{\eta\gamma\eta^{-1}}$. Además, dado cualquier cerrado C dentro de este entorno, se tiene que $\eta^{-1}C$ es cerrado contenido en el r -entorno de g_γ . Si C es invariante por $\eta\gamma\eta^{-1}$ y por \tilde{f} , entonces

$$\gamma\eta^{-1}C = (\eta^{-1}\eta)\gamma\eta^{-1}C = \eta^{-1}C,$$

es decir que $\eta^{-1}C$ es γ -invariante. También $\tilde{f}\eta^{-1}C = \eta^{-1}\tilde{f}C = \eta^{-1}C$, así que $\eta^{-1}C$ es \tilde{f} -invariante. Por lo tanto, se tiene $\eta^{-1}C \subset T_\gamma$, con lo cual $C \subset \eta T_\gamma$. De lo anterior resulta que ηT_γ es el cerrado maximal invariante contenido en el r -entorno de $g_{\eta\gamma\eta^{-1}}$, así que $\eta T_\gamma \subset T_{\eta\gamma\eta^{-1}}$. \square

Bibliografía

- [A] I. Agol (2013) *The virtually Haken conjecture*, Doc. Math. 18. With an appendix by Ian Agol, Daniel Groves, and Jason Manning, pp. 1045–1087
- [B] T. Barthelmé (2017) *Anosov flows in dimension 3, preliminary version*, Notas disponibles en el sitio web del autor (aquí).
- [BFPP1] T. Barthelmé, S. Fenley, S. Frankel, R. Potrie (2024) *Partially hyperbolic diffeomorphisms homotopic to the identity in dimension 3, part I: the dynamically coherent case*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 57, No. 2, pp. 293-349
- [BFM] T. Barthelmé, S. Frankel, K. Mann (2022) *Orbit equivalences of pseudo-Anosov flows*, arXiv:2211.10505v1
- [BI] C. Bonatti, I. Iakovoglou (2023) *Anosov flows on 3-manifolds: The surgeries and the foliations*, Ergodic Theory Dyn. Syst. 43, No. 4, pp. 1129-1188
- [Br] M. Brunella (1993) *Separating the Basic Sets of a Nontransitive Anosov Flow*, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 25, 5, pp. 487 - 490
- [Bo] P. Boyland (2000) *New dynamical invariants on hyperbolic manifolds*, Isr. J. Math. 119, pp. 253–289
- [C1] D. Calegari (2007) *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, Oxford University Press
- [C2] D. Calegari (2001) *Leafwise smoothing laminations*, Algebraic & Geometric Topology, Vol. 1, pp. 579 - 587
- [Ca] A. Candel (1993) *Uniformization of surface laminations*, Annales scientifiques de l'É.N.S., 4^e, 26, 4, pp. 489 - 516
- [CL] C. Camacho, A. Lins-Neto (1985) *Geometric theory of foliations*, Springer Science+Business Media New York
- [doC] M. do Carmo (1992) *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications
- [Fa] A. Fathi (1989) *Homotopical stability of pseudo-Anosov diffeomorphisms*, Ergodic theory & dynamical systems, 10, pp. 287 - 294
- [F] S. Fenley (1994) *Anosov Flows in 3-Manifolds*, Annals of Mathematics, 139(1), pp. 79–115
- [F2] S. Fenley (2023) *\mathbb{R} -covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows in atoroidal pieces*, Comment. Math. Helv. 98, pp. 1–39
- [FH] A. Fathi, M. Herman (1977) *Existence de difféomorphismes minimaux*, Système dynamique I - Varsovie, Astérisque, 49, pp. 37 - 59
- [FoH] P. Foulon, B. Hasselblatt (2013) *Contact Anosov flows on hyperbolic 3-manifolds*, Geometry & Topology 17, pp. 1225 - 1252
- [FP1] S. Fenley, R. Potrie (2024) *Partial hyperbolicity and pseudo-Anosov dynamics*, Geom. Funct. Anal. 34, No. 2, pp. 409-485
- [FP2] S. Fenley, R. Potrie (2023) *Intersection of transverse foliations in 3-manifolds*, arXiv:2310.05176v2 [math.GT] 14 Oct 2023
- [G] S. Goodman (1983) *Dehn surgery on Anosov flows*, Palis, J. (eds) Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol 1007. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [GGL] A. García-Sassi, P-A. Guihéneuf, P. Lessa (2024) *Geodesic tracking and the shape of ergodic rotation sets*, <https://arxiv.org/abs/2312.06249>
- [GH] E. Ghys, P. Harpe (1990) *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Springer Science+Business Media New York

- [Go] W. Gottschalk (1958) *Minimal sets: An introduction to topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., 64, pp. 336 - 351
- [K] S. Kojima (1988) (Isometry transformations of hyperbolic 3-manifolds), *Topology and its Applications*, 29, pp. 297 - 307
- [KH] A. Katok, B. Hasselblat (1997) *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, 54. Cambridge University Press
- [M] M. Martínez (2023) *Método de baricentro y rigidez de Mostow*, Monografía de grado disponible en www.cmat.edu.uy ([aquí](#)).
- [Mo] L. Mosher (1992) *Dynamical systems and the homology norm of a 3-manifold, II.*, *Invent. Math.*, 107, pp. 243 - 281
- [Pe1] G. Perelman (2002) *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159
- [Pe2a] G. Perelman (2003) *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245
- [Pe2b] G. Perelman (2003) *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109
- [Pl] J. F. Plante (1972) *Anosov flows*, *American Journal of Mathematics* 94.3, pp. 729-754
- [T1] W. Thurston (1982) *Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol 6, 3, pp. 357 - 381
- [T2] W. Thurston (1997) *Three-manifolds, foliations and circles, I, preliminary version*, <http://arxiv.org/abs/math/9712268v1>